The One-Dimensional Heat Equation with a Nonlocal Initial Condition

معادلة الحرارة في بعد واحد مع شرط ابتدائي غير موضعي

W. E. Olmstead

Department of Engineering Sciences and Applied Mathematics Northwestern University, Evanston, IL 60208, U.S.A.

C. A. Roberts

Department of Mathematics, Northern Arizona University Flagsta, AZ 86011, U.S.A.

الخلاصة

تم دراسة مسألة القيمة الحدية لمعادلة الحرارة في بعد واحد تحت قيد الشرط الابتدائي الغير موضعي. اعتمدت الدراسة على استخدام معادلة تكامل فريدهولم (Fredholm). تم اشتقاق حل المعادلة التكاملية كتمدد للـ eigenfunction المتحققة للحالات التي ينطبق عليها إما التميز أو عدم التميز. تم مناقشة وتوضيح الظروف التي قد يحدث عنها تأثير الرنين مع التوضيح بمثال.

1. مقدمة Introduction

لقد اعتبرنا معادلة الحرارة في بعد واحد وهي

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = q(x,t), \qquad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \tag{1}$$

بتطبيق الشروط الحدية

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \alpha_0 v(0,t), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(\ell,t) = -\alpha_\ell v(\ell,t), \qquad t > 0, \tag{2}$$

حيث $\alpha_0 > 0,\ \alpha_l > 0$. في مكان المواصفات الكلاسيكية للبيانات الابتدائية، قمنا بفرض الشرط الابتدائي الغير موضعي

$$v(x,0) = g(x) + u(x), \qquad u(x) \equiv \int_0^\infty h(x,t)v(x,t)\,dt. \tag{3}$$

في هذه المسألة، $q(x,t),\ h(x,t),\ g(x)$ هي دوال معطاة، ومتصلة.

من الواضح ان المعادلات (1) – (3) تحتوي على مشكلة غير تقليدية لان البيانات الابتدائية $v(x,0)$ محددة بدلالة الحل على كل $t \geq 0$. هناك حالات فيزيائية متنوعة يمكن ان تنمذج بالمعادلات (1) – (3). تفسير مباشر هو ان $v(x,t)$ تمثل تركيز بعض المواد المنتشرة، والتي يكون فيها المستوى الابتدائي غير محدد، بالرغم من انه معروف ان المستوى الابتدائي يجب ان يتوازن مقابل الوسيط الوزني (weighted average) لكل مستويات التركيز القادمة.

في ورقة علمية بحثية [1] تم اعتبار الوجود والتميز واضمحلال طويل المدى للحل للمعادلات (1) – (3) في ترتيب اكثر عمومية، سمح بوجود مصدر غير خطي $q = q(x, t; v)$. هذه الدراسات تقترح الشرط الابتدائي الغير موضعي (3) كتعميم لنسخة منفصلة للتعامل مع هذا الشرط [2,3]. كل النتائج لـ [2,3] تتعلق بحالة الحل المتميز، وبتطبيق قيود مناسبة على $h(x,t)$، أو على مكافئها المنفصل، لضمان التميز.

هدفنا هنا هو بدأ دراسة مفصلة سوف تركز على تطبيقات اشمل للشرط الابتدائي الموضعي (3) بالنسبة لعدم التميز وعدم إمكانية الحل، وكذلك على إمكانية الحل المتميز. لتوضيح الجوانب الأساسية لهذه الأمور بطريقة

واضحة، سوف نقوم بحصر اهتمامنا بمعادلة الحرارة الخطية في بعد واحد (1) بشروط حدية غير مختلطة (2). للتسهيل، سوف نفترض أيضا ان الدالة الترجيحية (weight function) $h(x,t)$ هي على النحو التالي:

$$h(x,t) = r(x)w(t), \qquad 0 < r(x) \le 1, \quad |w(t)| \le M,$$
$$0 < \left| \int_0^\infty w(t) e^{-\lambda t}\, dt \right| < \infty, \qquad \lambda > 0. \tag{4}$$

التحليل الذي قمنا به سوف يعمل على اختزال (1) – (2) لمعادلة تكامل لـ $u(x)$. نستطيع بعد ذلك ان نركز على ايجاد $u(x)$، لأنه بمجرد ان تصبح معلومة فان (1) – (3) تمثل مسألة قياسية لمعادلة الحرارة.

بدأنا بالصيغة (1) – (3) في الشكل المتكافئ.

$$v(x,t) = F(x,t) + \int_0^\ell G\,(x,t \mid \xi,0)\, u(\xi)\, d\xi, \qquad 0 \le x \le \ell, \quad t \ge 0, \tag{5}$$

حيث

$$F(x,t) \equiv \int_0^t \int_0^\ell G\,(x,t \mid \xi,s)\, q(\xi,s)\, d\xi\, ds + \int_0^\ell G\,(x,t \mid \xi,0)\, g(\xi)\, d\xi. \tag{6}$$

هنا $G(x,t \mid ξ,s)$ هي دالة جرين (Green's function) المرتبطة بالمؤثر الحراري الخطي المتعرض الشروط الحدية (2). ويمكن التعبير عنه بالصيغة التالية:

$$G\,(x,t \mid \xi,s) = H(t-s) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\xi)\varphi_n(x) e^{-\lambda_n (t-s)}, \tag{7}$$

حيث (φ_n, λ_n)، $n = 1,2,\ldots..$ تحقق مسألة مشكلة القيم الذاتية (eigenvalue)

$$\varphi_n''(x) + \lambda_n \varphi_n(x) = 0, \qquad 0 < x < \ell,$$
$$\varphi_n'(0) = \alpha_0 \varphi_n(0), \qquad \varphi_n'(\ell) = -\alpha_\ell \varphi_n(\ell), \tag{8}$$

بتطبيق الشرط orthonormalization

$$\int_0^\ell \varphi_n(x)\varphi_m(x)\, dx = \delta_{mn}. \tag{9}$$

بضرب المعادلة (5) في $h(x,t)$ وإجراء التكامل على $(0,l)$ نحصل على معادلة تكامل فردهولم (Fredholm) من النوع الثاني لـ $u(x)$،

$$\tilde{K}u(x) \equiv \int_0^\ell \tilde{k}(x,\xi)u(\xi)\,d\xi = u(x) - \tilde{F}(x), \qquad 0 \le x \le \ell, \tag{10}$$

حيث

$$\tilde{F}(x) \equiv \int_0^\infty h(x,t)F(x,t)\,dt \tag{11}$$

و

$$\tilde{k}(x,\xi) \equiv \int_0^\infty h(x,t)G\left(x,t \mid \xi,0\right)\,dt. \tag{12}$$

2. تحليل المعادلة التكاملية Analysis of the Integral Equation

مع $h(x,t)$ تحقق المعادلة (4)، يمكن ان نحول معادلة التكامل (10) لشكل متماثل بواسطة تعريف

$$U(x) \equiv [r(x)]^{-1/2}\,u(x). \tag{13}$$

وينتج عن ذلك ما يلي:

$$KU(x) \equiv \int_0^\ell k(x,\xi)U(\xi)\,d\xi = U(x) - f(x), \qquad 0 \le x \le \ell, \tag{14}$$

حيث

$$f(x) \equiv [r(x)]^{1/2} \int_0^\infty w(t)F(x,t)\,dt \tag{15}$$

و

$$k(x,\xi) \equiv [r(x)r(\xi)]^{1/2} \int_0^\infty w(t)G\,(x,t \mid \xi,0)\; dt. \tag{16}$$

خاصية التماثل للكيرنيل (kernel) $k(x,\xi) = k(\xi,x)$ يمكن ملاحظته بسهولة من المعادلة (7)، والتي تسمح لـ (16) بالتعبير عنها على النحو التالي:

$$k(x,\xi) = [r(x)r(\xi)]^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}(\lambda_n)\varphi_n(\xi)\varphi_n(x), \tag{17}$$

حيث

$$\hat{w}(\lambda_n) = \int_0^\infty w(t)e^{-\lambda_n t}\, dt, \qquad n = 1, 2 \ldots. \tag{18}$$

وحيث ان قيم الايجن (eigenvalues) λ_n للمعادلة (8) تكون حقيقية وموجبة، فان $\hat{\omega}(\lambda_n)$ يمكن ان تفسر على انها تحويل لابلاس (Laplace) لـ $w(t)$ محسوب عند قيم الايجن (eigenvalues)، علاوة على ان الحدود في (4) تزودنا بـ

$$0 < |\hat{w}\,(\lambda_n)| \le \int_0^\infty |w(t)|\, e^{-\lambda_n t}\, dt \le \frac{M}{\lambda_n}, \qquad n = 1, 2 \ldots. \tag{19}$$

ولكي نتأكد من ان $k(x,\xi)$ هي Hilbert-Schmidt kernel فانه لدينا

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \int_0^\ell k^2(x,\xi)\, dx\, d\xi &= \int_0^\ell \int_0^\ell r(x)r(\xi) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}(\lambda_n)\varphi_n(\xi)\varphi_n(x)\right]^2 d\xi\, dx \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{w}(\lambda_n)]^2 \le M^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^2 < \infty. \end{aligned} \tag{20}$$

التناهي في الحد العلوي في المعادلة (20) يأتي من حقيقة ان القيم الايجن للمعادلة (8) هي على النحو $\lambda_n = 0(n^2)$ عندما تؤول n إلى المالانهاية.

لحل المعادلة (14)، فإننا نستخدم دوال الايجن ϕ_n, n=1,2,…., والتي تحقق مسألة قيم الايجن.

$$K\Phi_n(x) \equiv \int_0^\ell k(x,\xi)\Phi_n(\xi)\,d\xi = \Lambda_n\Phi_n(x), \qquad 0 \le x \le \ell. \tag{21}$$

لتماثل Hilbert-Schmidt kernels، فانه معروف جيدا (المثال [4,5]) ان المعادلة (21) لها قيم ايجن Λ_n حقيقية ومجموعة orthonormal من الدوال الايجن

$$\int_0^\ell \Phi_m(x)\Phi_n(x)\,dz = \delta_{mn}. \tag{22}$$

ولإنشاء هذا هناك عدد لانهائي من $\phi_n(x)$ والتي تشكل مجموعة كاملة، ومن الضروري فقط ان نثبت ان $\Lambda_n \neq 0$ حيث $n=1,2,\ldots$ اذا كان هذا غير صحيحا فانه عندئذ يكون هناك حل بديهي لـ

$$\int_0^\ell \sum_{n=1}^{\infty} \hat{g}(\lambda_n)\varphi_n(\xi)\varphi_n(x)\,[r(\xi)]^{1/2}\,\Phi(\xi)\,d\xi = 0, \qquad 0 \le x \le \ell. \tag{23}$$

لان الدالة $\varphi_n(x)$ تشتمل على مجموعة كاملة، يمكننا ان نعبر عن أي حل للمعادلة (23) على انها صيغة من الشكل التالي:

$$\Phi(x) = [r(x)]^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x). \tag{24}$$

بالتعويض في المعادلة (23) من المعادلة (24) نحصل على

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}(\lambda_n)c_n\varphi_n(x) = 0, \tag{25}$$

مما يعني ان $\widehat{\omega}(\lambda_n)C_n = 0$، وعليه فان $C_n = 0$، و $n=1,2,\ldots$ وبهذا فان $\phi(x)\equiv 0$ هي فقط الحل الوحيد للمعادلة (23)، والتي تستبعد الصفر على انه قيمة ايجن للمعادلة (21). علاوة على ان هناك سيكون عدد غير محدود من القيم الايجن بـ $\Lambda_n \to 0$ عندما $n \to \infty$.

كما انه من المهم إنشاء شروط عندما يكون المؤثر التكاملي K المعرف بالمعادلة (14) موجبا. باستخدام الصيغة (24) للدالة $\phi(x)$ الاختيارية يؤدي إلى

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \Phi(x) K \Phi(x)\, dx &= \int_0^\ell \int_0^\ell \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}(\lambda_n)\varphi_n(\xi)\varphi_n(x)\,[r(x)r(\xi)]^{1/2}\,\Phi(x)\Phi(\xi)\, d\xi\, dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}(\lambda_n)\left[\int_0^\ell \varphi_n(\xi) \sum_{m=1}^{\infty} c_m \varphi_m(\xi)\, d\xi\right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}(\lambda_n) c_n^2.\end{aligned} \tag{26}$$

من المعادلة (26) فانه من الواضح ان اذا كانت $\hat{\omega}(\lambda_n) > 0$ و $n=1,2,\ldots$ فان K هي مؤثر موجب، ونتيجة لذلك فان $\Lambda_n>0$، و $n=1,2,\ldots$

سنقوم الان بإيجاد الحل للمعادلة التكاملية (14). ويوجد لذلك طريقين سوف نقوم بعرضهما هنا يعرف باسم متسلسلة نيومان (Neumann series) والأخرى مفكوك دوال الايجن.

لـ Hilbert-Schmidt kernel، فان من المعروف جيدا (المثال [4,5]) ان متسلسلة نيومان

$$U(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} K^n f(x) \tag{27}$$

تتقارب من الحل المميز للمعادلة (14) عندما

$$|\Lambda_1| < 1. \tag{28}$$

في المعادلة (27) K_n تفيد التكرر n^{th} للمؤثر التكاملي K. يمكننا ان نستبدل الشرط الأفضل (28) بشرط كافي للتقارب في متسلسلة نيومان، والتي تستخدم الحقيقة بان $|\Lambda_1|$ محدد بالجذر التربيعي للتكامل في المعادلة (20). ولهذا فان للتقارب المعادلة (27) فانه يكون كافيا ان

$$M\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^2\right]^{1/2} < 1. \tag{29}$$

القصور في متسلسلة نيومان هي انها لا يمكن ان تزود باي معلومات حول حلول المعادلة (14) المرتبطة بـ $|\Lambda_1|\geq 1$. ولتغلب على هذا الموضوع، سوف نعتمد على فك (expansion) دالة الايجن.

لان $\phi_n(x)$ تم وضعها كمجموعة orthonormal كاملة، فانه يمكن البحث عن حل للمعادلة (14) باستخدام فك (expansion) المعادلة

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x). \qquad (30)$$

وبالتعويض في المعادلة (14) واستخدام المعادلة (21) نحصل على

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \Lambda_n)\, a_n \Phi_n(x) = f(x). \qquad (31)$$

وبالخاصية orthonormality للمعادلة (22) ويترتب على ذلك

$$(1 - \Lambda_n)\, a_n = \int_0^{\ell} f(x)\Phi_n(x)\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \qquad (32)$$

الإمكانيات البديلة للمعادلة (23) واضحة. اذا كانت $\Lambda_n \neq 1$، و$n = 1,2,\ldots,$ فان كل a_n تحدد بشكل واضح من المعادلة (32). وهذا يؤدي إلى حل مميز للمعادلة (14) على النحو التالي

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\int_0^{\ell} f(\xi)\Phi_n(\xi)\, d\xi}{1 - \Lambda_n} \right] \Phi_n(x). \qquad (33)$$

البديل، اذا كانت $\Lambda_N = 1$ لبعض $n=N$ محددة، فان المعادلة (32) تشير إلى ان المعادلة (14) ليس لها حل ما عدا

$$\int_0^{\ell} f(\xi)\Phi_N(\xi)\, d\xi = 0. \qquad (34)$$

وعندما تكون المعادلة (34) متحققة، فان المعادلة (14) تمتلك حل غير مميز

$$U(x) = a_N \Phi_N(x) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^{\infty} \left[\frac{\int_0^\ell f(\xi)\Phi_n(\xi)\, d\xi}{1 - \Lambda_n} \right] \Phi_n(x), \qquad (35)$$

حيث a_N اختياري

لتلخيص النتائج التي حصلنا عليها، لدينا (1) – (3) تصبح مشكلة قياسية لمعادلة الحرارة، وحلها معطى بالمعادلة (5)، بمجرد ان نحدد $u(x)$. تحديد $u(x)$ يستنتج من المعادلة (13) والحل للمعادلة (14) لـ $U(x)$. الحل المميز للمعادلة (14) معطى بالمعادلة (27) عندما تتحقق المعادلة (28) أو (29) وبعمومية اكثر بالمعادلة (33) كلما $\Lambda_N \neq 1$، $n=1,2,\ldots$. اذا كان هناك $\Lambda_N=1$ فانه لا يوجد حل ما لم تكون المعادلة (34) متحققة. عندئذ هناك حل غير مميز يعطى بالمعادلة (35).

تقترح الصيغة (33) ان الحل لـ (1) – (3) يعرض نوع من تأثير الرنين. هذه البيانات الابتدائية للرنين تظهر عندما $h(x,t)$ يضبط بشكل يحرك واحد من Λn بالقرب من الوحدة. هذا يعني انه اذا كان هناك بعض n=N مثل $\Lambda_N=1-\varepsilon$، و $0<|\varepsilon|<<1$، فان $U(x)$ سوف تحدد بالنمط المرتبط مع $\phi_N(x)$.

3. حالة خاصة للترجيح الزماني Special Case of Temporal Weighting

في هذه الحالة تكون دالة الترجيح $h(x,t)$ تعتمد فقط على الزمن وهذا يؤدي إلى تبسيط كبير في نتائج الجزء 2. سوف نعتبر حالة خاصة من المعادلة (4) بحيث ان

$$h(x,t) = w(t), \qquad 0 \le w(t) \le M. \qquad (36)$$

في هذه الحالة مشكلة قيم الايجن في (21) تأخذ الشكل التالي

$$\int_0^\ell \left[\sum_{m=1}^{\infty} \hat{w}(\lambda_m)\varphi_m(x)\varphi_m(\xi) \right] \Phi_n(\xi)\, d\xi = \Lambda_n \Phi_n(x), \qquad 0 \le x \le \ell. \qquad (37)$$

من السهل ان نثبت ان (37) تتحقق بواسطة

$$\Phi_n(x) = \varphi_n(x), \qquad \Lambda_n = \hat{w}(\lambda_n), \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (38)$$

في ضوء المعادلة (36)، يترتب على المعادلة (18) ان $\hat{\omega}(\lambda_n) > 0$ و

$$\hat{w}(\lambda_1) > \hat{w}(\lambda_2) > \cdots > \hat{w}(\lambda_n) \to 0, \qquad \text{as } n \to \infty. \tag{39}$$

وعليه فان متسلسلة نيومان (27) تتقارب إلى الحل المميز للمعادلة (14) مع $u(x)=U(x)$ كلما كانت $\widehat{\omega}(\lambda_1) < 0$. بدلالة مفكوك دالة الايجن لحل المعادلة (14)، اذا كانت $\widehat{\omega}(\lambda_n) \neq 1$، $n=1,2,\ldots,$ فان

$$u(x) = U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\int_0^{\ell} f(\xi)\varphi_n(\xi)\, d\xi}{1 - \hat{w}(\lambda_n)} \right] \varphi_n(x) \tag{40}$$

تزودنا بحل مميز للمعادلة (14). اذا كانت $\widehat{\omega}(\lambda_N) = 1$ لحالة محددة $n=N$، فان المفكوك

$$u(x) = U(x) = a_N \varphi_N(x) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^{\infty} \left[\frac{\int_0^{\ell} f(\xi)\varphi_n(\xi)\, d\xi}{1 - \hat{w}(\lambda_n)} \right] \varphi_n(x), \tag{41}$$

مع a_N اختياري، يزودنا بحل غير مميز للمعادلة (14) اذا كان فقط

$$\int_0^{\ell} f(\xi)\varphi_N(\xi)\, d\xi = 0. \tag{42}$$

وعليه فانه لحالة خاصة للمعادلة (36)، $u(x)$ تعطى لكل الحالات الموجودة اما بالمعادلة (40) او (41). هذه بدلالة دوال الايجن لمسألة Sturm-Liouville (8). مع $u(x)$ محددة فان المعادلة (5) تزودنا بحل مميز أو غير مميز لـ (1) – (3).

كمثال على هذه الحالة الخاصة التي تشرح تأثير بيانات الرنين الابتدائية، فإننا نعتبر (1) – (3) بـ

$$q(x,t) = 0, \qquad g(x) = 1, \qquad \alpha_0 = \alpha_{\ell} = \infty, \qquad \ell = \pi, \tag{43}$$

ودالة الترجيح تعطى بـ

$$h(x,t) = \beta e^{-\epsilon t}, \qquad \beta > 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1. \tag{44}$$

ويترتب على ذلك

$$v(x,0) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^2 + \epsilon}{n^2 + \epsilon - \beta} \right] \left[\frac{1 - (-1)^n}{n} \right] \sin nx, \qquad 0 < x < \pi. \tag{45}$$

مع ε ثابتة في المعادلة (45)، نجد ان β يمكن ان تستخدم كعامل ضبط وتوليف للوصول إلى نمط محدد لتحديد البيانات الابتدائية. وبهذا بوضع $\beta=N^2$، و $N = 1,2,3,\ldots$ فان النمط N^{th} يصل إلى $4N/\pi\varepsilon$ وعليه سوف تسيطر في المعادلة (45).

المراجع

1. K. Deng, Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions, *J. Math. Analysis and Appl.* **179**, 630{637, (1993).

2. J. Chabrowski, On nonlocal problems for parabolic equations, *Nagoya Math. J.* **93**, 109{131, (1984).

3. Y. Lin, Analytical and numerical solutions for a class of nonlocal nonlinear parabolic di®erential equations, *SIAM J. Math. Analysis* **25**, 1577{1594, (1994).

4. D. Porter and D.G.S. Stirling, *Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, (1990).

5. I. Stakgold, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Volume I, Macmillan, New York, (1967).

تمت الترجمة في المركز العلمي للترجمة

www.trgma.com

14-10-2011