

المضخة التمعجية او الدودية مع اطوال موجية كبيرة عند عدد رينولد منخفض

## Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number

A. H. SHAPIRO, M. Y. JAFFRIN AND S.L. WEINBERG

نقدم في هذا البحث دراسة الضخ بواسطة قطار من الامواج التمعجية اللانهائية تحت شروط عدد رينولد صغير نسبيا حتى نهمل تأثير القصور الذاتي وتكون نسبة الطول الموجي إلى القطر كبيرة حتى يمكن اعتبار الضغط منتظما على مساحة المقطع. موضح النتائج النظرية لكلا من الأشكال الهندسية المستوية والمتمائلة محوريا، ونسب السعة في المدى من صفر إلى الانسداد الكامل. من النظرية تبين ان لنسبة السعة معطاة هناك تتناقص خطي في ارتفاع الضغط لكل طول موجي مع زيادة المتوسط الزمني للتدفق. واثبتت التجربة العلمية بمعدات ثنائية الابعاد القيم النظرية.

كما كشفت الحسابات المتعلقة بحركة المائع في ظروف متعددة من التشغيل ان المتوسط الزمني للتدفق هو الفرق الجبري بين المتوسط الزمني للتدفق الامامي في قلب الانبوبة والمتوسط الزمني للتدفق الخلفي (الارتداد reflux) بالقرب من الاطراف. من الممكن ان تكون نسبة التدفق المرتد كبيرة جدا. ظاهرة الارتداد هذه لها اهمية فسيولوجية في وظيفة الحالب والنظام الهضمي. والخاصية الثانية لميكانيكا المائع مع اثارها الفسيولوجية هي ظاهرة الحصر trapping عند ظروف معينة لتدفق جرعة من المائع بشكل تقع حول المحور وتنتقل بسرعة الموجة مما يمكن اعتبارها كما لو انها محصورة في الموجة.

### 1. المقدمة Introduction

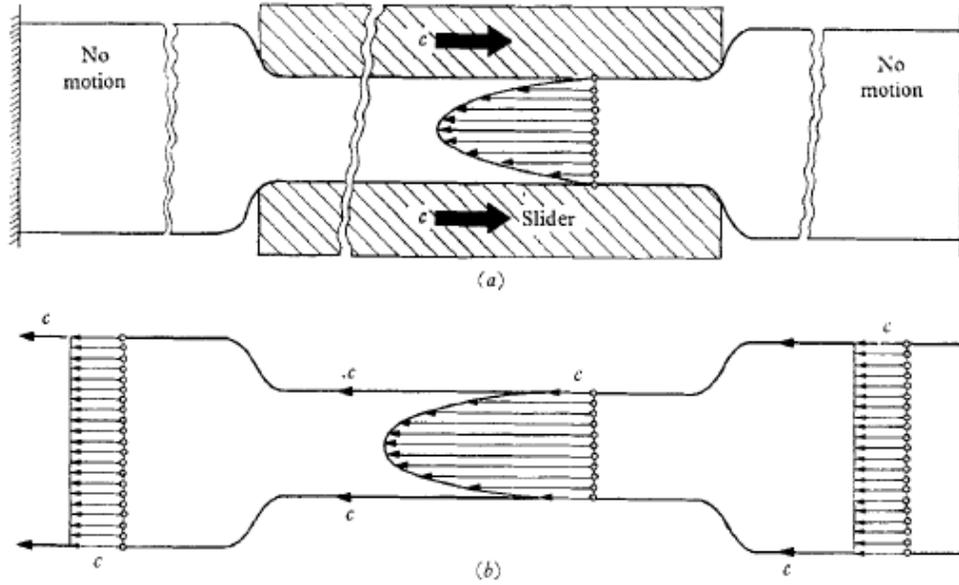
#### 1.1 الهدف والرؤية Object and scope

تهتم هذه الدراسة البحثية بميكانيكا المائع للمضخة التمعجية او الدودية في ظروف (i) طول موجة تمعجية كبيرا بالمقارنة مع اتساع القناة و(ii) عدد رينولد المناسب صغيرا جدا ليعتبر التدفق بدون قصور ذاتي. يبدو ان الشرط الثاني منطقيا وينطبق على قناة الحالب في الانسان وينطبق ايضا بدرجة اقل على الجهاز الهضمي وعلى المضخات الدوارة الميكانيكية باستخدام موائع لزجة.

موضح في الجزء 3 خصائص الضخ الاجمالي لقطار موجي لانهاية لمستوى ثنائي الابعاد وله تماثل محوري. مقارنة بين النظرية وتجربة المستوى ثنائي الابعاد موضحة في الجزء 4. في الجزء 5 والجزء 6 نوضح دراسة تفصيلية لحركة المائع لتدفق مستوى وتدفق تماثل المحور على التوالي. كما نلقي الضوء على الظاهرتين الاكثر اثارا التي تم اكتشافها وهي ظاهرة الارتداد reflux والمحصرة trapping.

## 2.1. نظرة اولية على فكرة عمل المضخة التمعجية او الدودية An elementary view of how a peristaltic pump works

يعطي الشكل 1 صورة فيزيائية مبسطة لفكرة عمل المضخة التمعجية. الجزء العلوي من المخطط (محور اسناد المختبر) يوضح انبوبة طويلة مغلقة من طرفيها حيث تتولد موجة التمعج الانكماشية من خلال حركة كفة الانزلاق إلى اليمين بسرعة  $c$ . لان طرفي الانبوبة مغلقين فلا يحدث تدفق في اي من المقاطع الكبيرة. في محور اسناد الموجة (المخطط السفلي) والذي يتحرك إلى اليمين بسرعة  $c$  بالنسبة إلى محور اسناد المختبر فان الشكل الموجي يبدو ثابتا.



الشكل 1. مخطط لشرح فكرة عمل المضخة التمعجية (a) كما تبدو في محور اسناد المختبر (غير مستقرة) (b) كما تبدو في محور اسناد الموجة (مستقرة).

كذلك تتحرك الجدران نحو اليسار بسرعة  $c$ ، وايضا هناك تدفق موحد المركبات نحو اليسار بسرعة  $c$ ، في المناطق ذات مساحة المقطع الكبيرة. للحفاظ على تدفق الحجم لمائع غير قابل للانضغاط فان متوسط السرعة نحو اليسار في الجزء المتقلص يجب ان يزيد عن  $c$ . لنفترض انه للحظة يكون فيها التدفق لزج وبدون قصور ذاتي فان شكل منحنى السرعة في الجزء المتقلص يجب ان يأخذ شكل قطع مكافئ *parabolic*، بسرعة  $c$  على الجدران. لا يوجد تدرج في الضغط في المقاطع ذات مساحة المقطع الكبيرة لكن يتناقص الضغط من اليمين إلى اليسار في المناطق المتقلصة وهذا يعود إلى الفقد في اللزوجة.

يتواجد نفس التدرج في الضغط في محور اسناد المختبر. وعليه فان الموجية التمعجية سوف تتسبب في زيادة الضغط في اتجاه الموجة. في محور اسناد المختبر يكون التوزيع الطولي للسرعة في المنطقة المتقلصة من نوع تدفق بازوييه "Poiseuille flow" نحو اليسار بسرعة طولية او محورية تساوي صفر عند الجدران.

إذا تم نزع الغالق سيكون هناك تدفق اضافي ومقداره يعتمد على الضغط. خلال تشغيل المضخة ينتقل المائع ناحية اليمين من خلال المقاطع الكبيرة ويقل التدفق نحو اليسار في المقاطع المتقلصة بالمقارنة مع حالة النهاية المغلقة.

فقدان لزوجة بازوييه المرتبطة بالمائع سوف تعمل على تقليل ارتفاع الضغط الناتج عن الحركة التمعجية.

نستخلص من المناقشة التالية على نتيجتين تنطبقان على اشكال موجية عامة (i) التشتت هو ميزة اساسية في المضخة التمعجية. بدون تأثيرات اللزوجة فان التدفق في المناطق المتقلصة يكون من نوع تدفق المكونات بدون ان يصاحبه انخفاض في الضغط. عوضا عن ذلك، عند تطبيق تكامل برنولي على تدفق inviscid مستقر سوف لن يظهر اي تغير في الضغط على طرفي موجة التقلص او الانكماش. (ii) كما هو ظاهر في محور اسناد المختبر فان الشرط الطبيعي في الموجة التمعجية هي ان المائع في الاجزاء المتقلصة تتحرك عكس اتجاه الموجة، والمائع في المناطق الكبيرة يتحرك في نفس اتجاه الموجة.

### 3.1 دراسات سابقة Related work

المعاملات بدون ابعاد لقطار موجي لا نهائي هي على النحو التالي: (a) الرقم الموجي  $a/\lambda$  حيث  $a$  هي متوسط نصف اتساع المرور (هندسة مستوية) او متوسط نصف القطر (هندسة تماثل محوري)، و  $\lambda$  هي الطول الموجي، (b) نسبة السعة،  $\phi \equiv b/a$  حيث ان  $b$  هي نصف سعة الموجة التمعجية و (c) عدد رينولد  $R$  والذي سوف نوضح فيما بعد انه افضل مقياس لتأثيرات القصور الذاتي الصغيرة عندما نعرفه على ان  $R \equiv (ac/v) \cdot (a/\lambda)$ ، و (d) متوسط زمن التدفق على سبيل المثال  $\theta \equiv \bar{Q}/bc$  لحالة المستوى، حيث ان  $\bar{Q}$  هو متوسط زمن التدفق الذي تم قياسه في محور اسناد المختبر. لقيم ثابتة لأول ثلاثة فان الرابع قد يمتلك اي قيمة بالاعتماد على ارتفاع الضغط نتيجة لعمل المضخة.

يلخص الجدول 1 الافتراضات في الدراسة النظرية لـ Burns و Parkes (1967)، و Hanin (1968) و Fung و Yih (1969)، بالمقارنة مع الافتراضات الموضحة في هذه الدراسة. جميعها يتعامل مع قطار لا نهائي من الامواج الجيبية. قام كلا من Burns و Parkes بتطوير حل في صورة مفكوك القوى المتزايدة في  $\phi$ . النتائج الجبرية التفصيلية لا تظهر والحسابات العددية ضرورية. في بعض الامثلة اجررت هذه الحسابات للرتبة  $\phi^4$ .

	Burns & Parkes	Hanin	Fung & Yih	Present paper
Geometry	Plane axisym.	Plane	Plane	Plane axisym.
Reynolds number, $R$	Zero	Arbitrary	Arbitrary	Zero
Wave-number, $a/\lambda$	Arbitrary	Zero	Arbitrary	Zero
Amplitude ratio, $\phi$	Small†	Small†	Small†	Arbitrary

† Solution is expressed in ascending powers of  $\phi$ .

TABLE 1

حل Hanin مقيد بافتراضات اضافية وهي ان متوسط تدرج الضغط يساوي صفر. هذا يكافئ تقييد  $\theta$  لقيمة وحيدة لكل قيمة من  $\phi$ . يصاغ حل Hanin ايضا على اساس مفكوك القوى المتزايدة لـ  $\phi$  للتدفق المتذبذب وللرتبة الثانية لمتوسط التدفق. كما ان Fung و Yin استخدموا ايضا مفكوك القوى المتزايدة لـ  $\phi$  واعطت نتائج حتى الرتبة  $\phi^2$ . الحل الموضح هنا مقيد لقيم  $R$  صغيرة (حالة عدم وجود القصور الذاتي) وقيم صغيرة لـ  $a/\lambda$  (اي قيم  $\lambda$  كبيرة). على الجانب الاخر  $\phi$  اختيارية والكثير من النتائج الهامة معطاة في شكل مغلق.

#### 4.1 بيانات فسيولوجية عن الحالب Physiologic data for the ureter

الخواص الهندسية والحركية للحالب غير محددة بشكل كامل حتى الان. انها تتغير بشكل كبير من شخص لآخر ومن زمن لآخر (انظر Boyarsky 1964 و Campbell 1963 و Maksimov و Bloom 1957 و Narath 1951). بالرغم من امتلاكنا معرفة غير كافية عن اقل مساحة مقطع والابعاد خلال الحركة الانقباضية الا انها كافية لتحليل ديناميكا المائع. يوضح الجدول 2 مدى من المتغيرات لحالب الانسان. يتغير شكل مساحة المقطع من شكل دائري تقريبا عندما يكون منتفخا إلى شكل قريب من شكل النجمة مع فصوص شبه ثنائية الابعاد عندما تنقبض.

Length	30 cm
Inside diameter	from 0.01 cm (in doubt) to 0.5 cm (extreme !)
Wave speed	from 1 cm/s to 6 cm/s
Frequency	several waves per minute
Wavelength	from 1 cm to 15 cm

TABLE 2

لا يهدف النموذج النظري الموضح ادناه إلى تمثيل دقيق لوظيفة الحالب، لكن للكشف بطريقة سهلة قدر الامكان ظاهرة ميكانيكا المائع في الحركة التمعجية. ويفترض ان النتائج لهذا النموذج البسيط لها علاقة بوظيفة الحالب.

## 5.1. النموذج النظري Theoretical model

تعتمد مبررات النموذج النظري المعطى هنا على تحليل القيمة الاسية. في الملحقين A و B، نجد شرح توضيحي لمضمون الافتراضات المتعلقة بـ  $a/\lambda$  و R وكذلك تطوير كامل لتسوية (normalization) تحليل القيمة الاسية للمعادلات التفاضلية.

(i) طول موجي لا نهائي Infinite wavelength. افترض ان النسبة بين الاتساع والطول الموجي صغيرة، اي ان  $a/\lambda \ll 1$ . إذا اعتبرنا للحالب ان  $a \cong 0.1$  و  $\lambda \cong 5$  cm فان  $a/\lambda \cong 1/50$ . لهذا فان ميل الجدران صغيرا جدا، ومن الممكن ان تظهر ان السرعات العرضية وتدرجات الضغط صغيرة بالمقارنة مع القيم الطولية. هذا يعمل على تبسيط الحل لأنه من الممكن ان نفترض ان الضغط يكون منتظم لحظيا على كل مساحة مقطع.

(ii) تدفق عديم القصور الذاتي Inertia-free flow. نحن مهتمون بحالة الموجة التمعجية التي تعمل كمضخة، اي انها تولد ارتفاع في الضغط في اتجاه التدفق. كما هو موضح في ما بعد تحت هذه الظروف فان السرعة الطولية بالنسبة لمحور اسناد الموجة هي من الرتبة c. لهذا فان حد اللزوجة في معادلة الحركة  $\mu \partial^2 u / \partial y^2$  من الرتبة  $\mu c / a^2$  على الاقل عندما تكون تأثير اللزوجة قويا وغير محدد بطبقات حدودية رقيقة، حيث ان x و y هما احداثيات في محور اسناد الموجة، و u و v مركبات السرعة و  $\mu$  هي اللزوجة. حيث ان  $\partial u / \partial x$  هي من الرتبة  $c/\lambda$ ، يكون حد القصور الذاتي  $\rho u \partial u / \partial x$  من الرتبة  $\rho c^2 / \lambda$  للكثافة  $\rho$ . لهذا فان نسبة القصور الذاتي إلى قوى اللزوجة تكون من الرتبة  $(ca/v)(a/\lambda)$ ، حيث ان v هي اللزوجة الحركية. هذا هو R الملائمة لحالات تأثير القصور الصغير كما هو مثبت في الملحق A والملحق B. افترضنا في هذا النموذج ان R صغيرة جدا بحيث ان حد القصور في معادلة الحركة يمكن اهماله.

في حالة حالب الانسان نأخذ  $c \cong 3$  cm/s و  $a \cong 0.1$  cm و  $v \cong 0.007$  cm<sup>2</sup>/s و  $\lambda \cong 5$  cm وبالتالي تكون  $R \cong 1$ . هذا ايضا صغيرا جدا ويمكن في هذه الحالة تطبيق نظرية عدم وجود القصور الذاتي، وكما هو موضح في الشكل 3.2، فان نظرية عدم وجود القصور الذاتي دقيقة. ان اعتبار فرضيات الطول الموجي اللانهائي وتدفع عديم القصور الذاتي مع بعضهما يكافئ الفرضية بان التدفق من نوع بازوييه عند كل مقطع.

(iii) قطار موجي جيبي لانهاضي Infinite sinusoidal wave-train. هناك تطور لقطار امواج جيبيية لانهاضية مع احداثيات جدران تتبع القانون

$$H = 1 + \phi \sin 2\pi(\xi - \tau), \quad (1)$$

حيث ان H هي احداثي الجدران وليس له ابعاد h/a و h احداثي الجانبي للجدران، و  $\xi$  هو الاحداثي العرضي وليس له ابعاد  $X/\lambda$ ، حيث X و  $\lambda$  الاحداثيات في محور اسناد المختبر، و  $\tau$  الزمن بدون ابعاد  $ct/\lambda$ . الجدران نفسه يتحرك في اتجاه عرضي فقط. إذا الرقم الموجي بين مستودع الادخال ومستودع التفريغ للمضخة محدود ولكن متكامل فان الحل للقطار الموجي اللانهائي يبقى متحققا. ومن المحتمل ان اكثر ظاهرة هامة في المضخة التمعجية يكون غير حساس لشكل الموجة.

(iv) خواص المائع **Fluid properties**. افترض ان كلا من الكثافة واللزوجة ثابتين.

## 2. الاداء الاجمالي للضخ Gross pumping performance

### 1.2. نظرية للمستوى ذو البعدين Theory for plane two-dimensional geometry

يوضح الشكل 2 المسميات او المصطلحات المستخدمة للقطار الموجي الجيبي اللانهائي عند النظر له من الاعلى في محور اسناد المختبر ومن الاسفل في محور اسناد الموجة. التحويلات بين محوري الاسناد هي على النحو التالي:

$$x = X - ct, \quad y = Y, \quad (2)$$

و

$$u(x, y) = U(X - ct, Y) - c, \quad v(x, y) = V(X - ct, Y), \quad (3)$$

لمركبات السرعة في محور اسناد المختبر U و V.

محور اسناد الموجة Wave frame. يمكن ان نبين انه اذا كان طول الانبوبة لانهائي ويساوي عدد صحيح من اطوال الامواج واذا كان فرق الضغط بين نهايتي الانبوبة ثابتا فان التدفق يكون مستقرا في محور اسناد الموجة. للتبسيط سوف نفترض ان هذه الشروط متحققة ونقوم بحل المشكلة في محور اسناد الموجة. مع افتراض ان الطول الموجي لانهائي وان التدفق عديم القصور الذاتي ومعادلة نافير وستوكس Navier-Stokes في اتجاه المحور y تختزل إلى ما يلي:

$$\partial p / \partial y = 0, \quad (4)$$

وتكون في اتجاه محور x على النحو التالي:

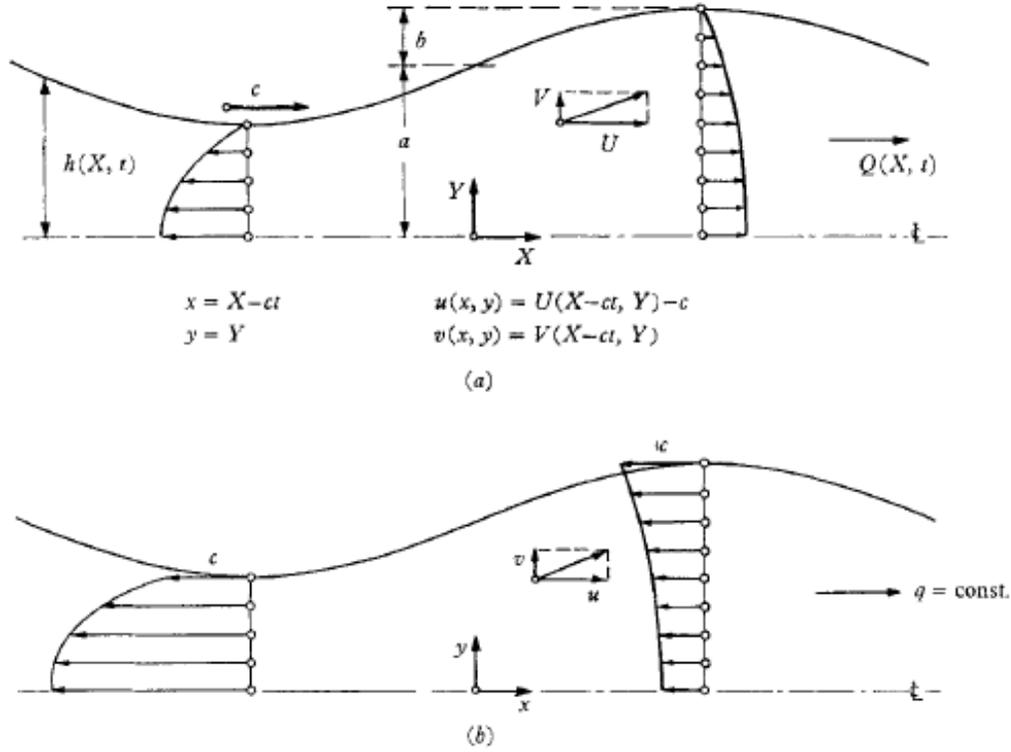
$$\partial p / \partial x = dp/dx = \mu \partial^2 u / \partial y^2, \quad (5)$$

للضغط p. حيث ان  $dp/dx$  تعتمد على x ولكن ليس على y، فان (5) يمكن ان تكامل مرتين بالنسبة إلى y. باستخدام الشروط الحدية التالية:

$$\partial u / \partial y = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, \quad u = -c \quad \text{at} \quad y = h,$$

نحصل على شكل منحنى السرعة والذي يأخذ شكل قطع مكافئ مبينا التدفق الموضعي والذي يكون من نوع بازرييه:

$$\frac{u}{c} = -1 - \frac{a^2}{2\mu c} \frac{dp}{dx} \left[ \left( \frac{h}{a} \right)^2 - \left( \frac{y}{a} \right)^2 \right]. \quad (6)$$



الشكل 2. مصطلحات تطور القطار الموجي الجببي اللانهائي (a) محور اسناد المختبر (b) محور اسناد الموجة.

معدل التدفق الحجمي عبر كل مقطع  $q$  يكون ثابتا ولا يعتمد على  $x$  و  $t$ . ويحسب على النحو التالي:

$$q = \int_0^h u dy; \quad (7)$$

مع المعادلة (6) نحصل على

$$\frac{q}{ac} = -\frac{h}{a} - \frac{h^3}{3\mu ca} \frac{dp}{dx}. \quad (8)$$

محور اسناد المختبر. نحصل على معدل التدفق الحجمي اللحظي  $Q(X, t)$  من خلال اجراء عملية التكامل

$$Q = \int_0^h U(X, Y, t) dY, \quad (9)$$

حيث  $Q$  هو التدفق الموضعي اللحظي بالنسبة لمحور اسناد المختبر. من المعادلة (3) فان  $U=u+c$  ويؤول التكامل إلى

$$Q = q + ch. \quad (10)$$

اعتبر جهاز تمعجي كمضخة فان الكمية العملية الهامة هي المتوسط الزمني للتدفق الحجمي عند كل مقطع.  $\bar{Q}$  كمية تقيس متوسط معدل التفريغ. باستخدام المعادلة (10) فان  $\bar{Q}$  تحسب من خلال اجراء التكامل على الفترة  $T$ :

$$\bar{Q} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T Q dt = q + \frac{c}{T} \int_0^T h dt.$$

وجد ان التكامل للموجة الجيبية (1) الذي يحسب باعتبار  $X$  ثابت يأخذ القيمة  $a\lambda/c$ . وعليه فان

$$\bar{Q} = q + ac, \quad (11)$$

والتي لها معنى فيزيائي واضح.

الزيادة في الضغط لكل طول موجي هو

$$\Delta p_\lambda \equiv \int_0^\lambda (dp/dx) dx. \quad (12)$$

بإدخال القيمة  $dp/dx$  المعطاة بالمعادلة (8) واستبدال  $h$  من المعادلة (1) و  $q$  من المعادلة (11) وإدخال متغيرات ليس لها وحدات فان المعادلة (12) تصبح على النحو التالي:

$$\frac{a^2}{\mu c \lambda} \Delta p_\lambda = \frac{3}{2} \frac{\phi^2}{(1-\phi^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ 3 - \frac{2+\phi^2}{\phi} \theta \right]. \quad (13)$$

يمثل المقام للمتوسط الزمني للتدفق عديم الوحدة  $\theta \equiv \bar{Q}/bc$  معدل التدفق الحجمي، إذا كانت كل المواد بين  $y=a+b$  و  $y=a-b$  قد انتقلت بالحمل ناحية اليمين مثل المواد الصلبة بسرعة  $c$ . يمكن تشبيه الامر على انه ازاحة المكبس في المضخات الحرارية. لانسداد كامل تكون  $\theta=1$ .

خصائص الضغط والتدفق. كما هو مطلوب للطبيعة الخطية للحالة  $R = 0$ ، فان المنحنى لـ  $\Delta p_\lambda$  مقابل  $\theta$  هو خط مستقيم بميل سالب، على سبيل المثال الشكل 7. يمكن ان نعبر بشكل مناسب عن العلاقة بين  $\Delta p_\lambda$  و  $\theta$  لقيم

ثابتة من  $\phi$  عن طريق التقاطعين: ازدياد الضغط عديم الوحدات  $(\Delta p_\lambda)_{\theta=0}$ ، متوسط زمني للتدفق يساوي صفر، والمتوسط الزمني للتدفق عديم الوحدات  $\theta_0$  لارتفاع في الضغط يساوي صفر. هذه تعطى على النحو التالي:

$$\frac{a^2}{\mu c \lambda} (\Delta p_\lambda)_{\theta=0} = \frac{9}{2} \frac{\phi^2}{(1-\phi^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (14)$$

$$\theta_0 = \frac{3\phi}{2+\phi^2}. \quad (15)$$

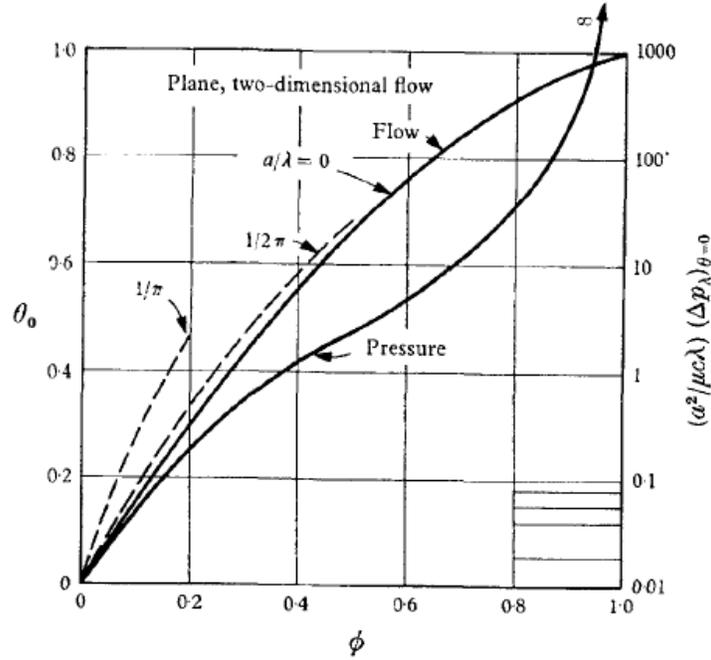
المعادلتين (14) و(15) موضحتين في الشكل 3 على كامل المدى، و  $\phi = 0$  (بدون انقباض او بدون تمعج) إلى  $\phi = 1$  (انسداد كامل).

لـ  $\phi \ll 1$ ، تزداد  $\theta_0$  خطياً مع  $\phi$  في حين ان  $(\Delta p_\lambda)_{\theta=0}$  تزداد مع زيادة  $\phi^2$ . عندما تؤول  $\phi$  إلى 1 فان  $\theta_0$  تؤول إلى 1، لان كل المائع المحصور في طول موجي واحد يجب ان ينتقل بسرعة  $c$ . علاوة على انه عندما تؤول  $(\Delta p_\lambda)_{\theta=0}$  إلى  $\infty$ . لهذا فان حجم التدفق لا يعتمد على ازدياد الضغط والذي يعد ميزة لمضخات الازاحة الايجابية. تخدم الموجة التمعجية كمضخة في المدى الذي يكون فيه متوسط التدفق في اتجاه ازدياد الضغط. اي عندما  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ .

الكفاءة الميكانيكية Mechanical efficiency. يتوافق تعريف كفاءة المضخة مع التعريف المستخدم بصفة عامة في المضخات الميكانيكية

$$E \equiv \frac{\bar{Q} \Delta p_\lambda}{-\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^\lambda \left( p + \tau_0 \frac{\partial h}{\partial X} \right) \frac{\partial h}{\partial t} dX dt}. \quad (16)$$

يمثل البسط معدل تخزين الطاقة المفيدة في المائع، وتحسب لكل وحدة طول موجي ويؤخذ المتوسط خلال دورة كاملة. اما المقام فيمثل معدل تحويل الشغل المبذول بواسطة مؤثر خارجي إلى الجدران، لكل طول موجي ويؤخذ المتوسط على دورة كاملة.



الشكل 3. حالة المستوى (الخط المتصل) التدفق  $\theta_0$  لارتفاع في الضغط مقداره صفر، وارتفاع الضغط لتدفق مقداره صفر، كلاهما كدالة في نسبة السعة  $\phi$ ، (الخط المتقطع) تأثير الطول الموجي المحدود على  $\theta_0$  (بالاعتماد على Parkes و Burns 1967).

لـ  $a/\lambda \ll 1$  تكون مساهمة حد اجهاد الجدران على تكامل الشغل الميكانيكي مهملا بالمقارنة مع حد الضغط. بإهمال حد الاجهاد على الجدران وباستخدام المعادلات (1) و (8) و (13) لإيجاد تكامل المعادلة (16) نحصل على ما يلي:

$$E = \frac{(\theta/\theta_0)[1 - (\theta/\theta_0)]}{(1 + 2\phi^2)(2 + \phi^2)} \frac{\theta}{\theta_0} \quad (17)$$

يمكن بطريقة بديلة تعريف الكفاءة  $E'$  على النحو التالي:

$$E' \equiv 1 - (D/\bar{W}),$$

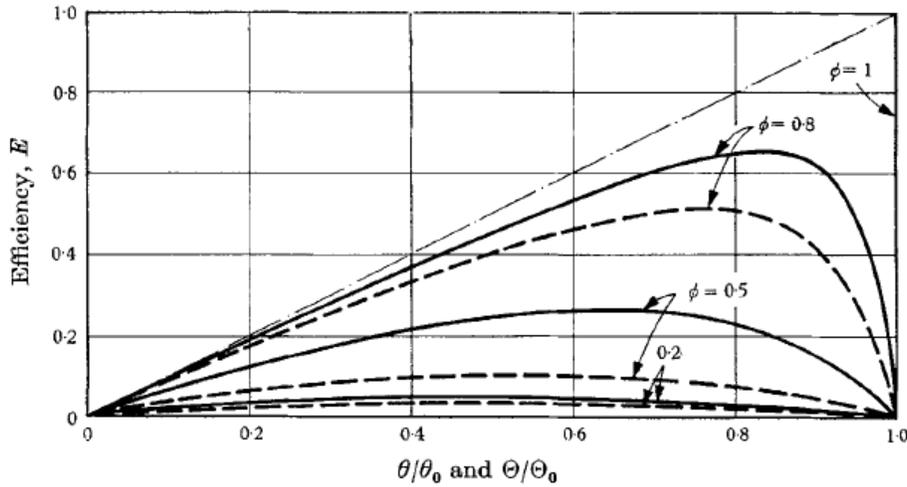
حيث ان  $\bar{W}$  هي مقام المعادلة (16) و  $D$  هو معدل تشتت اللزوجة والتي تعطى بالمعادلة

$$D = \mu \int_0^\lambda \int_0^h \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy.$$

بحسابات تفصيلية يتبين ان  $E'$  تشبه تماما  $E$  المعطاة في المعادلة (17). هذا يؤكد ان التعريف المستخدم لـ  $E$  يحدد بشكل مناسب الشغل الميكانيكي المبذول في مركبتي تشتت اللزوجة والطاقة المخترنة المفيدة.

المنحنيات المتصلة في الشكل 4 توضح  $E$  مقابل  $\theta/\theta_0$  لقيم متعددة لـ  $\phi$ . بينما تكون  $E$  هامة فانه من الواضح ان  $\phi$  تكون كبيرة وفي هذه الحالة نحصل على كفاءة عالية لكن على نطاق ضيق نسبيا من التدفق.

عند الحد  $\phi = 1$  فان اي من (i)  $\theta = \theta_0$  تكون غير محددة او (ii) تكون  $\Delta p_\lambda = \infty$  و  $\theta/\theta_0 < 1$ ، لكنها غير محددة. من بين هذين الاحتمالين يكون الاحتمال الاول الاكثر فائدة من الناحية العملية لأنه الاحتمال الثاني يتضمن على سرعات لانهاية خلال المنطقة المغلقة (المنسدة). لـ  $\theta/\theta_0 = 1$  تكون الكفاءة غير محددة لان تشتت اللزوجة يكون ثابت في حين ان الطاقة الميكانيكية المفيدة المخترنة في المائع تكون في المدى من 0 إلى  $\infty$ . وطبقا لذلك فانه لـ  $\phi = 1$  فان الكفاءة  $E$  تكون في المدى من 0 لـ  $\Delta p_\lambda = 1$  إلى 1 عندما تؤول  $\Delta p_\lambda$  إلى  $\infty$ .



الشكل 4 كفاءة الضخ مقابل التدفق  $\theta/\theta_0$  او  $\Theta/\Theta_0$ . الخط المتصل حالة المستوى ثنائي الابعاد والخط المقطع يمثل التماثل المحوري

## 2.2 مقارنة النتائج للحالة المستوية مع النظريات الاخرى Comparison of results for plane case with other theories

على الشكل 3 يوضح المنحنى المقطع قيم  $\theta_0$  والتي حسبت حتى الرتبة  $\phi^4$  في السعة بواسطة كلا من Burns و Parkes (1967)، لحالة عدم وجود القصور الذاتي مع طول موجي اختياري. الحل المقيد للطول الموجي اللانهائي (المنحنى المتصل  $a/\lambda = 0$ ) يكون جيدا حتى  $a/\lambda = 1/2\pi$ . اما لـ  $a/\lambda = 1/\pi$  فان الحل للطول الموجي اللانهائي يقلل من قيمة متوسط التدفق بمقدار  $1/3$  حتى  $\phi = 0.2$ .

اعطى Hanin (1968) صيغة لـ  $\theta_0$  تأخذ في الحسبان قوى القصور الذاتي لكنها مقتصرة على الطول الموجي اللانهائي ومتحققة للسعة حتى الرتبة  $\phi^2$

$$\theta_0 = \frac{3}{2}\phi[1 - 0.0083R^2].$$

في حالة عدم وجود القصور الذاتي فان هذه المعادلة تختزل إلى  $3\phi/2$ ، والتي تتفق مع المعادلة (15) عندما تكون  $\phi$  صغيرة. علاوة على ان الحد الثاني بين القوسين يوضح ان تأثير القصور الذاتي اقل من 1%، إذا كانت  $R < 1$ . حيث ان القيم التقليدية لـ  $R$  لحالب الانسان هي في حدود 1 (§2.4)، وعليه يبدو ان حل القصور الذاتي المساوي للصفر يكون دقيقا إلى حد ما من الناحية الفسيولوجية (الوظيفية) على الاقل عندما  $\phi$  لا تكون كبيرة جدا.

الحل ثنائي الابعاد لـ §3.2، عندما تؤخذ لاقل  $\phi$  وهذا متوافقا مع Fung و Yih عندما اعتبارا أصغر قيمة لـ  $R$ .

### 3.2. نظرية التماثل المحوري Theory for axisymmetric geometry

المصطلحات الموضحة في الشكل 2 ما عدا الاحداثي العرضي هما  $R$  و  $r$  بدلا عن  $Y$  و  $y$ ، على التوالي، بينما  $a$  تمثل متوسط نصف القطر. يكون تحويل الاحداثيات هو  $r = R$ .

محور اسناد الموجة. مع الافتراضات بان الطول الموجي لانهائي والتدفق عديم القصور الذاتي فان معادلات نافير وستوكس يكون لها الشكل التقريبي التالي:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (18)$$

حيث ان  $dp/dx$  دالة في  $x$  فقط فان المعادلة (18) يمكن ان تكامل مرتين بالنسبة إلى  $r$ . باستخدام الشروط الحدية والتي هي على النحو التالي:

$$\partial u / \partial r = 0 \quad \text{at} \quad r = 0, \quad u = -c \quad \text{at} \quad r = h,$$

نحصل مرة اخرى على شكل القطع المكافئ لتدفق بازوييه الموضوعي

$$\frac{u}{c} = -1 - \frac{a^2}{4\mu c} \frac{dp}{dx} \left[ \left( \frac{h}{a} \right)^2 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]. \quad (19)$$

التدفق الثابت خلال الانبوبة،

$$q = \int_0^h \pi u d(r^2), \quad (20)$$

يمكن حسابه الان باستخدام المعادلة (19) على النحو التالي:

$$\frac{q}{\pi a^2 c} = - \left( \frac{h}{a} \right)^2 - \frac{h^4}{8 \mu c a^2} \frac{dp}{dx}. \quad (21)$$

محور اسناد المختبر. لاحظ ان

$$Q = \int_0^{\lambda} \pi U d(\mathbf{R}^2), \quad (22)$$

وباستخدام صيغ التحويلات نحصل على ما يلي:

$$Q = q + \pi h^2 c. \quad (23)$$

وعليه فان المتوسط الزمني للتدفق الحجمي على دورة كاملة يكون

$$\bar{Q} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T Q dt = q + \frac{\pi a^2 c}{T} \int_0^T \left( \frac{h}{a} \right)^2 dt. \quad (24)$$

باجراء التكامل للجدار الجيبي للمعادلة (1) نحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned} \frac{q}{\pi a^2 c} &= \frac{\bar{Q}}{\pi a^2 c} - (1 + \frac{1}{2} \phi^2), \\ &= (2\phi - \frac{1}{2} \phi^2) \Theta - (1 + \frac{1}{2} \phi^2), \end{aligned} \quad (25)$$

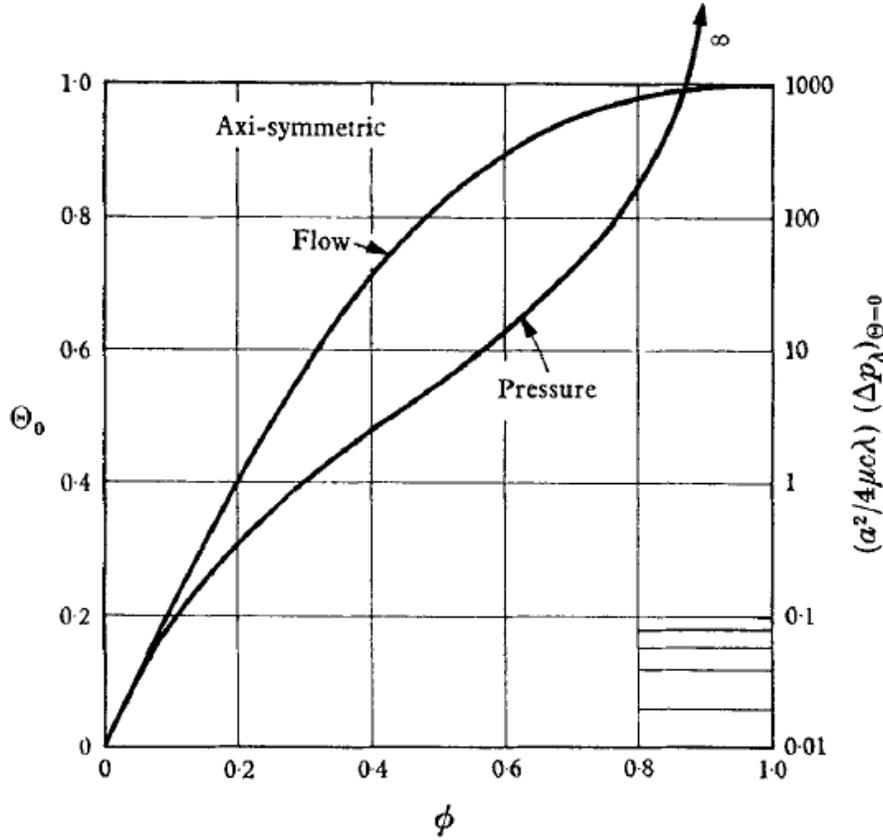
حيث ان

$$\Theta \equiv \frac{\bar{Q}}{\pi a^2 c (2\phi - \frac{1}{2} \phi^2)}, \quad (26)$$

وهو المتوسط الزمني لمعدل التدفق الحجمي عديم الوحدات. والمقام لهذه الصيغة هو التدفق الذي ينتقل إذا كانت كل المادة في الانبوبة بين نصف القطر (a-b) ونصف القطر (a+b) التي تنتقل بالحمل إلى اليمين، مثل الجسم الصلب، بسرعة c. مرة اخرى هذا المقام هو ازاحة مكبس للمشكلة وتكون  $\Theta = 1$  عندما تكون  $\phi = 1$ .

باجراء الحل لـ  $dp/dx$  من المعادلة (21) والتعويض في المعادلة (12) نحصل على ما يلي:

$$\Delta p_{\lambda} = - 8 \mu c \int_0^{\lambda} \frac{dx}{h^2} - \frac{8}{\pi} \mu q \int_0^{\lambda} \frac{dx}{h^4}.$$



الشكل 5 حالة التماثل المحوري. تدفق عديم الوحدات  $\Theta_0$  لزيادة الضغط تساوي صفر، وارتفاع الضغط عديم الوحدات لتدفق يساوي صفر، كلاهما كدالة في نسبة السعة  $\phi$ .

يمكن حساب التكامل باستخدام المعادلة (1) لـ  $h$ . من ثم التعويض عن  $q$  من المعادلة (25)، ويمكن الحصول على النتائج ووضعها في الصورة

$$\frac{a^2}{4\mu c\lambda} \Delta p_\lambda = \frac{8\phi^2(1 - \frac{1}{16}\phi^2) - 4\phi(1 - \frac{1}{4}\phi)(1 + \frac{3}{2}\phi^2)\Theta}{(1 - \phi^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (27)$$

خصائص الضغط والتدفق Pressure-flow characteristics. حيث انه كما في حالة المستوى، فان العلاقة بين  $\Delta p_\lambda$  و  $\Theta$  تكون علاقة خطية، وبالتالي يمكننا ان نقدر اداء المضخة بدلالة  $(\Delta p_\lambda)_{\Theta=0}$  و  $\Theta_0$ . هذه تعطي على النحو التالي:

$$\frac{a^2}{4\mu c\lambda} (\Delta p_\lambda)_{\Theta=0} = 8\phi^2 \frac{1 - \frac{1}{16}\phi^2}{(1 - \phi^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (28)$$

$$\Theta_0 = \frac{\phi(4 + \phi)}{2 + 3\phi^2}. \quad (29)$$

هذه المعاديتين موضحتين في الشكل 5. عندما  $\phi \ll 1$  و  $\Theta_0$  تتغير خطيا مع السعة، بينما  $(\Delta p_\lambda)_{\Theta=0}$  تؤول إلى  $\phi^2$ . كما ان  $\phi \rightarrow 1$  فان  $\Theta_0 \rightarrow 1$  و  $(\Delta p_\lambda)_{\Theta=0}$  تؤول إلى مالانهاية. يكون التدفق الحجمي ثابتا بغض النظر عن ازدياد الضغط كما في مضخة الازاحة الايجابية.

الكفاءة الميكانيكية Mechanical efficiency. في حالة التماثل المحوري فان المقام لمعادلة الكفاءة (16) يستبدل بما يلي:

$$\bar{W} = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^\lambda 2\pi h p \frac{\partial h}{\partial t} dX dt, \quad (30)$$

بحيث ان مساهمة  $\tau_0$  مهملة للأطوال الموجية الطويلة وقد اهملت بناء على ذلك. باجراء التكامل واعادة ترتيب المعادلة نحصل على النتيجة التالية:

$$E = \frac{(\Theta/\Theta_0) [1 - (\Theta/\Theta_0)]}{A(\phi) - (\Theta/\Theta_0)}, \quad (31a)$$

حيث ان

$$A(\phi) \equiv \frac{4 + 6\phi^2}{\phi^4(16 - \phi^2)^2} [4 + 4(1 - \phi^2)^{3/2} + 10\phi^2 + 7\phi^4 + \frac{3}{2}\phi^6]. \quad (31b)$$

الكفاءة كما تم حسابها من المعادلة (31) موضحة في الشكل 4 بالخطوط المقطعة مع نتائج مشابهة لتلك التي حصلنا عليها في الحالة المستوية.

### 3. تجربة ثنائية الابعاد A two-dimensional experiment

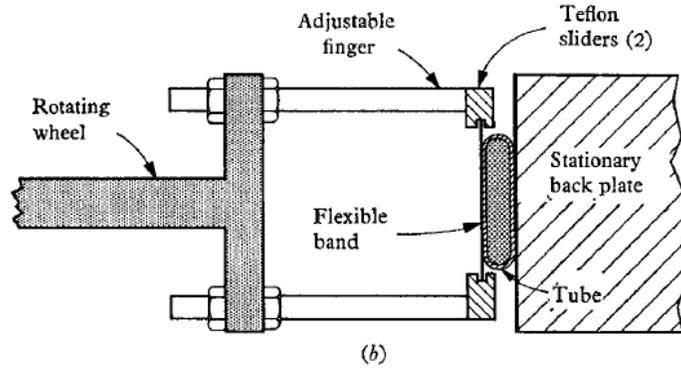
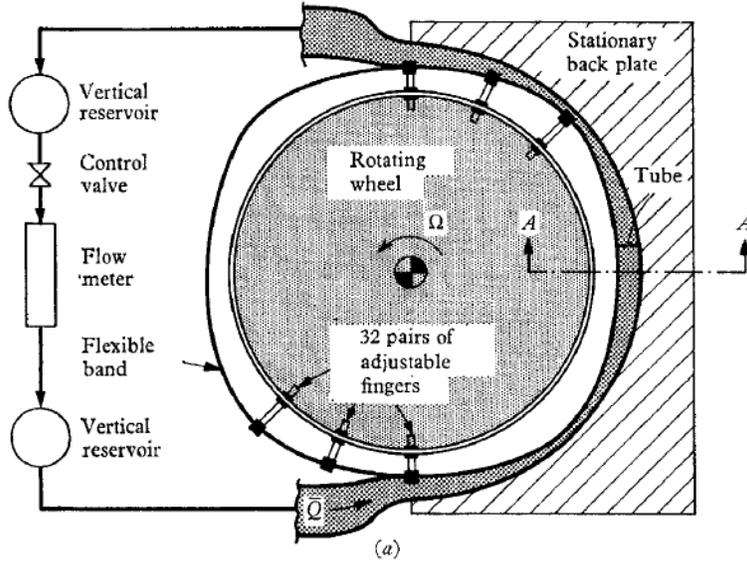
اجريت تجربة ثنائية الابعاد بواسطة Latham (1966) باستخدام الادوات الموضحة في الشكل 6. قناة اختبار مسطحة ومرنة من مادة polyvinylchloride سمك جدرانها 0.05 in. هذه الانبوبة محصورة في قوس  $180^\circ$  بين حزام حديدي مرن ودعامة ثابتة لها شكل شبه دائري نصف قطره 16 in، ويكون للانبوبة شكل مستطيل تقريبا وبارتفاع 2.5 in، ومتوسط اتساعها حوالي 0.3 in. تقع نهايتي قناة الاختبار خارج القوس النصف دائري حيث تتصلان بمستودعين رأسيين يحافظ على تدفق مائع بمعدل ثابت. اكتملت الدائرة بصمام تحكم يعمل على ضبط قيمة الزيادة في الضغط بين المستودعين وزود بوسيلة لقياس متوسط حجم التدفق. تم تثبيت 32 زوج من اصابع التحكم adjustable fingers على الإطار الدوار بحيث كل أصبع يحدد الموضع القطري للزائق المتصل مع الحزام المرن. وبما ان الحزام مقيد ضد الحركة الدورانية فتعمل مفاتيح الانزلاق على الحزام موجة تقدمية بإزاحة قطرية. تم ضبط الاصابع بحيث يكون هناك عدد صحيح من الاطوال الموجية في المنطقة الفعالة وتكون في صورة موجة جيبيية تقريبا.

اختلف الشكل الهندسي للموجة بطريقتين عن النموذج النظري: (i) الموجة على جدار واحد فقط و(ii) القناة

بالكامل منحنية في صورة شبه دائرة. هذه الفروقات غير مهمة ولكن لان نصف الاتساع  $a = 0.15$  in صغيرة بالمقارنة مع كلا من الطول الموجي ونصف قطر شبه الدائرة. لهذا فان نظرية الطول الموجي الطويل تبقى متحققة.

لموجة ثابتة فان المتغيرات التي يمكن ضبطها وقياسها هي سرعة الموجة  $c$  وزيادة الضغط  $\Delta p_\lambda$ ، واللزوجة  $\mu$  وتم ضبط اللزوجة وقياسها باستخدام خليط من الماء والجلسرين او من الماء وقياس اللزوجة عصير الذرة. وتم قياس  $\bar{Q}$  لكل خليط. من خلال خيارات  $c$  و  $\mu$  تم قياس  $R$  على نطاق واسع ولعدة مواع.

يوضح الشكل 7 النتائج العملية مع اربعة اطوال موجية ومع  $\phi = 1/3$ . ومحور  $y$  يمثل النسبة لزيادة الضغط  $\Delta p_\lambda$  مع القيمة النظرية المعطاة بالمعادلة (14). مع الاخذ بعين الاعتبار (i) ان الانبوبة لم تكن ثنائية الابعاد تماما ولها جدران منحنية وبأشكال مختلفة و(ii) والموجة كانت جيبية تقريبا والتوافق بين النظرية والتجربة العملية كانت بصفة عامة جيدة. لـ  $R > 0.2$  كان هناك نقصان واضح في اداء المضخة. تبين النقطتين لـ  $R = 38$  فقدان كبير في فعالية المضخة حيث تبدأ تأثيرات القصور الذاتي بلعب دورا قويا.



الشكل 6 مخطط لتجربة ثنائية الابعاد (Latham 1966) (a) المخطط (b) المقطع A-A.

#### 4. تفاصيل حركة المائع (حالة مستوية) (Details of fluid motion (plane case))

##### 1.4. توزيع السرعة ودالة التدفق في محور اسناد الموجة

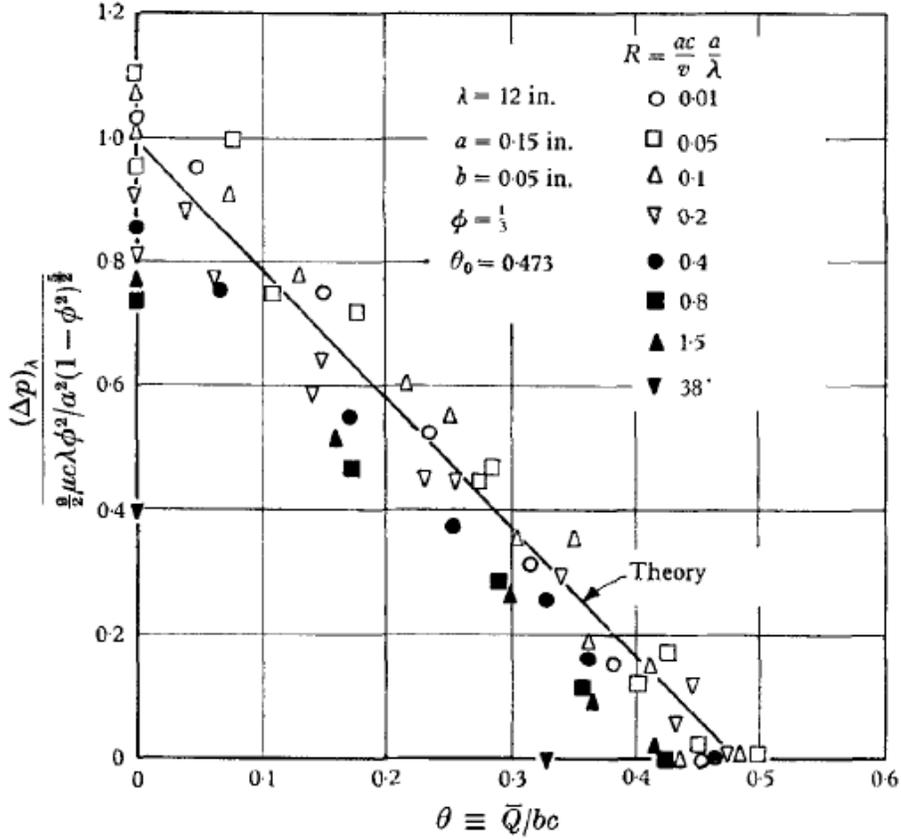
السرعة الطولية longitudinal velocity. باستخدام التحويلات في المعادلة (3)، وتطبيق المعادلات (1) و(8) و(11) إلى المعادلة (5) فان توزيع السرعة الطولية في محور اسناد المختبر يمكن ان تصاغ على النحو التالي:

$$\frac{U}{c} = \frac{\frac{3}{2}\phi}{1 + \phi \sin 2\pi(\xi - \tau)} [\theta + \sin 2\pi(\xi - \tau)] \left[ 1 - \left( \frac{\eta}{H} \right)^2 \right]. \quad (32)$$

حيث ان  $U/c$  تتغير بشكل قطع مكافئ على كل مساحة مقطع من الصفر عند الجدار إلى أقصى او اقل عند محور التماثل، ويمكننا ان نتخيل توزيع السرعة الطولي باختبار  $U/c$  عند المحور حيث  $\eta = 0$ . من المعادلة (32) من الممكن اثبات ان  $(U/c)_{\eta=0}$  تكون قيمة عظمى عندما  $\zeta=1/4$ ، اي ان عند اوسع جزء من القناة وتكون اقل ما يمكن عند  $\zeta=3/4$ ، اي ان عند اضيق جزء من القناة. وهذه القيم على الترتيب هي على النحو التالي:

$$(U/c)_{\eta=0, \max} = \frac{3}{2}(1 + \theta) \phi / (1 + \phi), \quad (33a)$$

$$(U/c)_{\eta=0, \min} = -\frac{3}{2}(1 - \theta) \phi / (1 - \phi). \quad (33b)$$



الشكل 7. نتائج عملية لحالة المستوى (Latham 1966). يمثل المحور الافقي المتوسط الزمني للتدفق عديم الاحتكاك. ومحور y يمثل النسبة بين ارتفاع الضغط المقاس والارتفاع النظري في حالة تدفق يساوي صفر.

تم رسم هاتين المعادلتين في الشكل 8 لحدين من المدى  $\theta$  بحيث ان الموجة التمعجية تعمل كمضخة. في هذا المدى تكون اقصى قيمة لـ  $U/c$  دائما موجبة في حين ان أدنى قيمة تكون سالبة. يصبح الاخير كبيرا جدا عند قيم  $\phi$  كبيرة.

بتسليط الضوء على هذه النتائج لقطار موجي جيبي لانهايتي نجد انها تتفق مع فكرة المضخة التمعجية الموضحة في الجزء 2.2 والشكل 1.

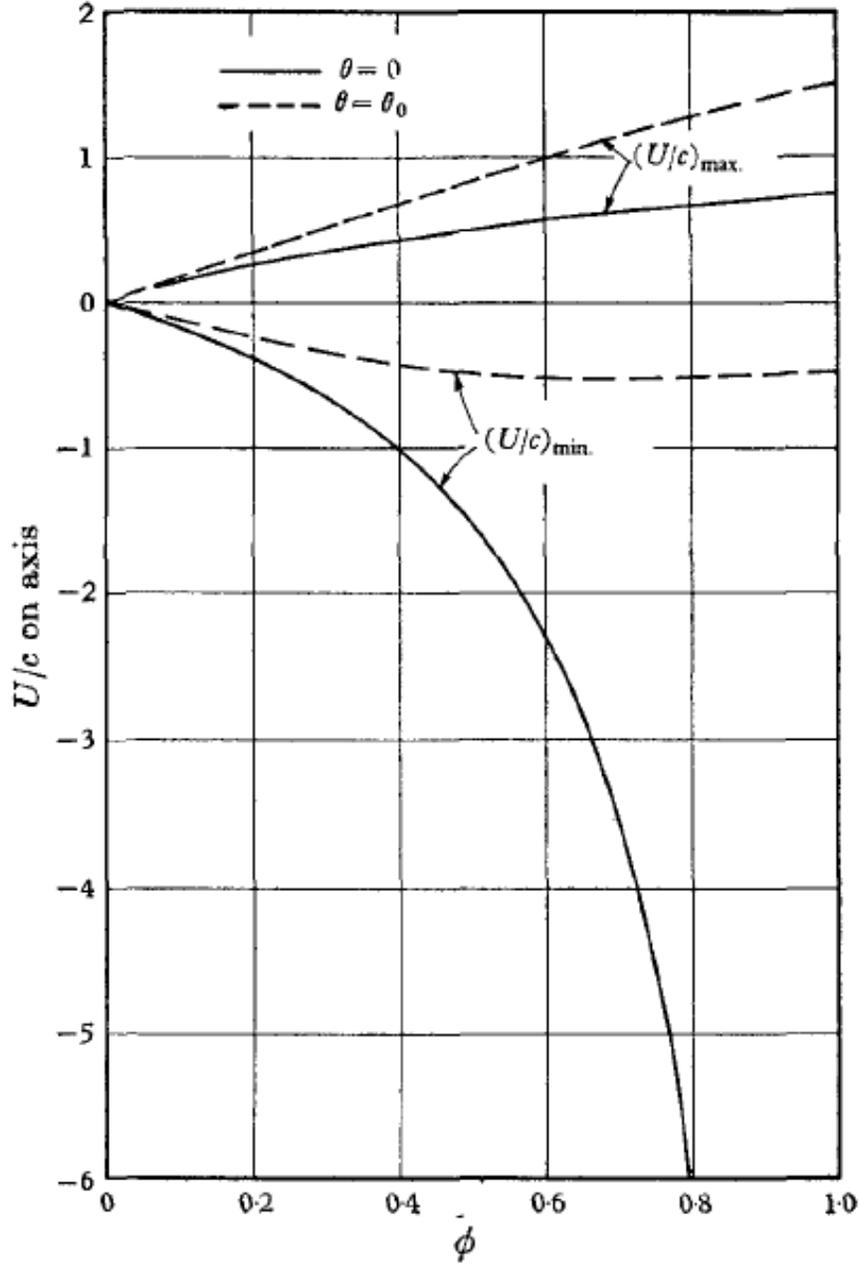
السرعة العرضية Transverse velocity. من معادلة الاستمرارية يمكننا حساب السرعة العرضية من التكامل التالي:

$$V = - \int_0^Y \frac{\partial U}{\partial X} dY,$$

والذي مع المعادلة (32) يؤدي إلى

$$\frac{V}{c} = -3\pi \frac{b}{\lambda} \left[ \frac{1-\phi\theta}{H} \frac{\eta}{H} + \left( \frac{2}{3} - \frac{1-\phi\theta}{H} \right) \left( \frac{\eta}{H} \right)^3 \right] \cos 2\pi(\xi - \tau). \quad (34)$$

دالة التدفق في محور اسناد الموجة. في محور اسناد المختبر يكون التدفق غير مستقرا وخطوط مسار الجسيمات كما هو موضح في الشكل 9 تكون مختلفة عن خطوط التدفق على سبيل المثال انظر (Parkes و Burns 1967 الشكل 4). التدفق في محور اسناد الموجة على الجانب الاخر يكون مستقرا



الشكل 8. حالة المستوى. اقصى قيم وأدنى قيم لـ  $U/c$  على المحور لحددين هما  $\theta=0$  و  $\theta=\theta_0$ .

وعليه فان خطوط المسار او خطوط التدفق كلها تتوافق مع بعضها البعض. تكون كلها متشابهة لشكل الجدران، لكن بسعة اقل مع الاقتراب من المحور ما عدا حالات معينة حيث تكون خطوط التدفق متقاربة كما هو موضح في الشكل 11.

وضعت دالة التدفق في محور اسناد الموجة مؤخرا في محل الاستخدام الهام كدلالة كمية لتحديد وتعريف مواد جسيمات مادة المائع في محور اسناد المختبر. والتي تعرف على انها

$$d\psi = u dy - v dx,$$

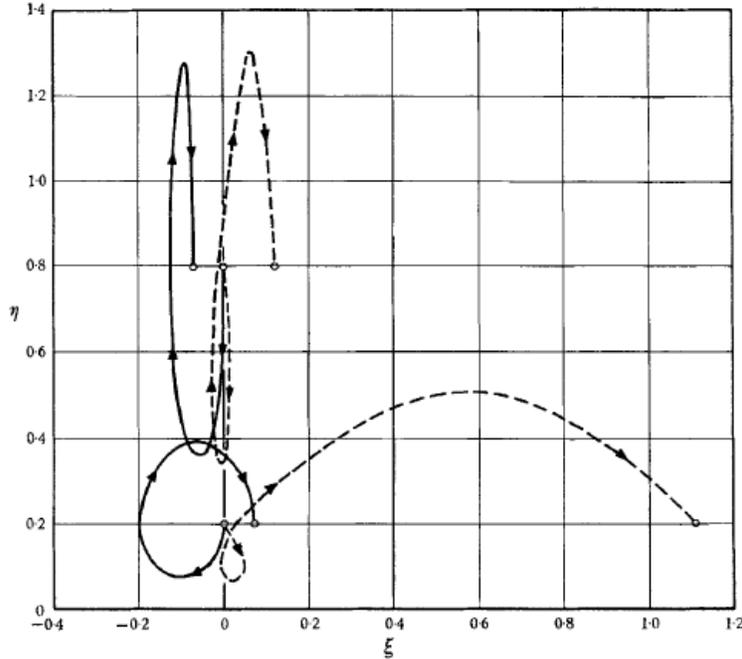
وباستخدام المعادلات (8) و(32) و(34) لتوزيع السرعة والتكامل نحصل على ما يلي:

$$\chi \equiv \frac{\psi}{ca} = \left[ \frac{H - (1 - \phi\theta)}{2} \right] \left[ 3 \frac{\eta}{H} - \left( \frac{\eta}{H} \right)^3 \right] - \eta, \quad (35)$$

حيث ان  $\Psi$  قد وضعت تساوي صفر على المحور. وتكون قيمتها عند الجدار هي

$$\chi_w = \phi\theta - 1. \quad (36)$$

في الملحق B نحصل على المعادلة (35) بطريقة بديلة من خلال الحل تقريبا الرتبة الصفرية لمعادلات نافيرر وستوكس بدلالة دالة التدفق.



الشكل 9. عينات عن مساقط الجسيمات لحالة المستوى مع  $\phi=1/2$  وبعدين وموجة جيبيية ومدارات الجسيمات لـ  $\eta_0=0.8$  عند  $\tau=0$  و  $\xi=0$ . الخط المتصل  $\theta/\theta_0=0$  والخط المتقطع  $\theta/\theta_0=1$

## 2.4. اشكال متوسط الازاحة للجسيمات المادية

واحدة من مظاهر ارتداد الحالب هو ان البكتيريا في بعض الاحيان تنتقل من المثانة إلى الكلية في حركة ضد تدفق البول. يحدث هذا في غضون ساعات وبسرعة أكبر بكثير لان تشرح بواسطة الانتشار الجزيئي، حتى عندما تعزز ببكتيريا الدفع الذاتي. تبدو هذه الظاهرة قابلة للتفسير من خلال حسابات الازاحة الكلية لدفعات من مائع له هوية ثابتة. من المحتمل ان تكون مساقط دفعات المائع هامة ايضا في وظيفة مسالك الجهاز الهضمي حيث تكون التفاعلات الكيميائية بين المحتويات والمواد على الجدران تتأثر بالنقل الحراري.

من المعادلة (32) والشكل 8 هناك دليل على انه عند مساحة مقطع ثابتة فان المائع يتحرك بشكل ترددي مقابل الموجة عند اطوار مختلفة من مرور الموجة. ويؤثر هذا السلوك على وظيفة الحالب وقنوات الجهاز الهضمي من خلال الازدواج الحادث بين النقل الحراري الطولي والنقل الانتشاري العرضي، مما يؤدي إلى زيادة الانتشار الطولي الكلي.

على اي حال هناك الية مختلفة وقوية لإعادة توزيع المواد في المضخة التمعجية. من الممكن التفكير بان الازاحة الكلية للمائع في محور اسناد المختبر يمكن ان نتعامل معها من خلال المتوسط الزمني للسرعة الطولية عند كل نقطة (حيث ان المتوسط الزمني للسرعة العرضية تساوي صفر). لكن في الواقع يخبرنا المتوسط الزمني للسرعة الطولية القليل عن اين يذهب المائع، وايضا من الممكن للمتوسط الزمني للسرعة عند نقطة ثابتة ان يكون سالبا، في حين ان الازاحة الكلية لجسيمات المائع لكل دورة يكون موجبا. لكي نصل إلى نتيجة مفيدة فإننا يجب ان نحسب مساقط الجسيمات المادية للمائع من خلال اجراء التكامل للمعادلات اللحظية

$$d\xi/d\tau = U/c, \quad d\eta/d\tau = (V/c)(\lambda/a), \quad (37)$$

حيث ان  $U/c$  و  $V/c$  هي دوال في كلا من  $\zeta$  و  $\eta$  و  $\tau$  كما هو معطى في المعادلتين (32) و (34).

نلاحظ ان مساقط الجسيمات في اطار الموجة يكون دوريا ويمكن ان نبين ان مساقط الجسيمات في اطار المختبر تكون تكرارية، بزم دوري مقداره  $\Delta\tau^*$ . ويعرف هذا الزمن بالفترة الزمنية بين لحظتين متعاقبتين والتي يكون عندهما الجسم يشغل نفس الموضع بالنسبة للموجة.

جسيمات على المحور Particles on the axis. يمكن اجراء التكامل بطريقة تحليلية للجسيمات على المحور حيث  $\eta = 0$  وتكون النتائج مفيدة. في مدى معين من  $\phi$  و  $\theta/\theta_0$  ويقوم جسيم المادة على المحور بعمل ازاحات دورية مع مشاركة موجة وسالبة للإزاحة الكلية. لنفترض ان الزمن الدوري لمسقط الجسيم هو  $\Delta\tau^*$  والازاحة الكلية المقابلة هي  $\Delta\xi^*$  ومن ثم داخل هذا المدى المعرف بـ  $\theta/\theta_0 \leq (2-\phi)(2+\phi^2)/9\phi^2$  وبالتالي يمكن اثبات ان

$$\Delta\xi^* = 3 \left[ \frac{1-\phi\theta}{\sqrt{\left[ \left(1-\frac{3}{2}\phi\theta\right)^2 - \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 \right]}} - 1 \right], \quad (38)$$

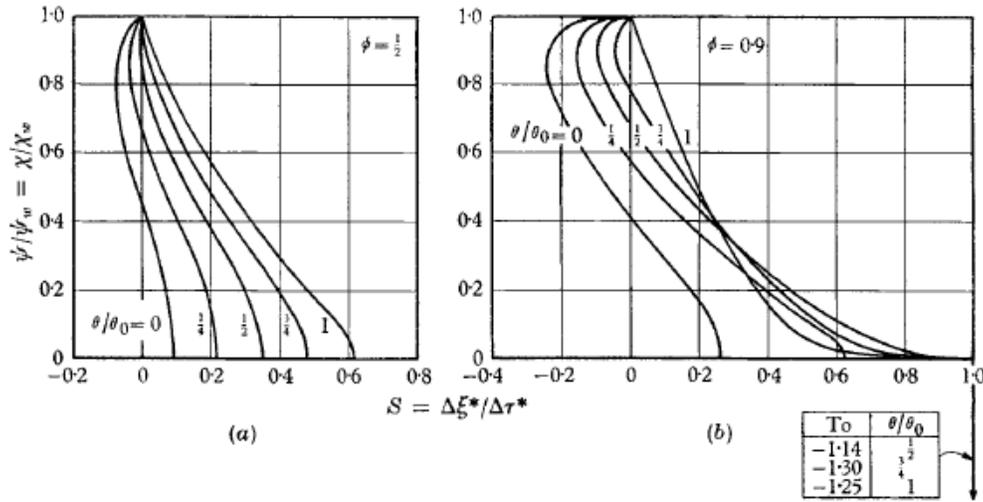
$$\Delta\tau^* = 1 + \Delta\xi^*. \quad (39)$$

بشكل مدهش وجد ان الزمن الدوري  $\Delta\tau^*$  لمسقط الجسيم ليست الوحدة (زمن الموجة الدوري). تتقدم الموجة وهناك ازاحة كلية  $\Delta\xi^*$ ، وعليه فان الجسيم يجب ان يسافر لزمن اما أكبر قليلا او اقل قليلا من زمن موجة واحد، لكي يجد نفسه في نفس المكان بالنسبة للموجة. نأخذ متوسط السرعة لإزاحة الجسيم على الزمن الدوري للجسيم وتكون على النحو التالي:

$$S \equiv \Delta\xi^*/\Delta\tau^*. \quad (40)$$

في مدى الضخ  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  تكون  $S$  موجبة لكل قيم  $\phi$ . انه امر مدهش بان يكون الامر كذلك. عندما  $\theta=0$  على سبيل المثال تقوم الجسيمات على المحور بعمل تقدم كلي للأمام في اتجاه الموجة، حتى مع ان  $\bar{Q} = 0$ . لكن هذا الامر يكون فقط عندما تكون الجسيمات عند مسافة معينة من المحور وتقوم بحركة امامية كلية في اتجاه معاكس للموجة. مقدار هذه الازاحات مهمل. عندما  $\theta=0$  و  $\phi=0.8$  على سبيل المثال فان  $S \approx 0.2$ ، وهذا يعني ان في خلال زمن دوري للجسيم يكون في هذه الحالة حوالي 1.2 دورة للموجة، جزء من المائع على المحور يتحرك فقط حوالي 20% من الطول الموجي في اتجاه الموجة.

جسيمات ليست على المحور Particles not on the axis. المعادلات (37) هي بصفة عامة لا تكامل بدلالة الدوال الاولية والتكاملات العددية في هذه الحالة تكون ضرورية.



الشكل 10 منحنيات متوسط سرعة التقدم  $S$  لجسيمات مادية مقابل قيمة دالة التدفق في محور اسناد الموجة والتي تعرف الجسيم. (a) لـ  $\phi = 1/2$  و  $\phi = 0.9$ .

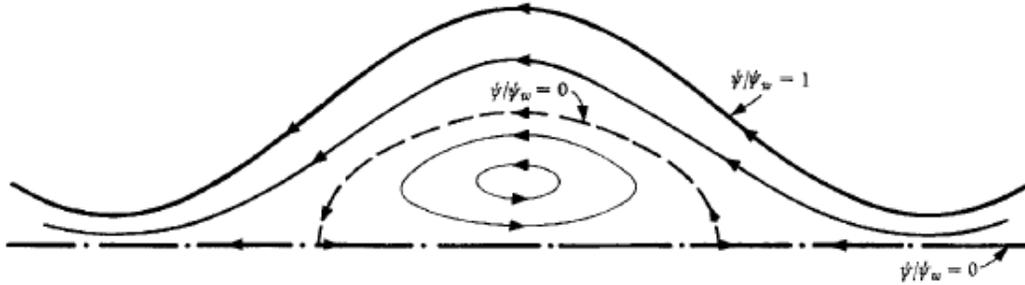
يوضح الشكل 9 النتائج للحالة النموذجية مع  $\phi=1/2$  ولـ  $\theta/\theta_0=1$  و  $\theta/\theta_0=0$ . موضعين بداية للجسيم موضح في الشكل، واحد بالقرب من المحور  $\eta_0=0.2$  عند  $\xi=0$  و  $\tau=0$  والاخر بالقرب من الجدران  $\eta_0=0.8$  عند  $\xi=0$  و  $\tau=0$ . كل مسقط موضح لزمن دوري واحد من حركة الجسيم، والتي تتكرر بعد ذلك. لـ  $\theta=0$  يتعرض الجسيم القريب من المحور في زمن دوري واحد إلى ازاحة كلية موجبة بمقدار 0.1 طول موجي تقريبا، ولـ

$\theta = \theta_0$  تتعرض لإزاحة مقدارها 1.1 تقريبا. يتعرض الجسيم بالقرب من الجدار لإزاحة كلية سالبة بمقدار 0.1 طول موجي تقريبا لـ  $\theta = \theta_0$ .

ظاهرة الارتداد Reflux phenomenon. إذا كان شكل السرعة المتوسطة لـ  $S$  موضعا كدالة في الموضع الجانبي  $\eta$  فان شكله سوف يعتمد على الموضع الطولي  $\zeta$ . والمخطط الأكثر اهمية وفائدة والخالي من اي غموض هو الشكل 10 بحيث ان السرعة المتوسطة  $S$  لجسيمات المادة مقابل تلك القيمة لدالة التدفق  $\chi/\chi_w$  والتي تعرف جسيمات المادة على خطوط تدفق الموجة  $\chi$ .

في الشكل (a) 10 نجد ان الاشكال النموذجية لـ  $S$  مقابل  $\chi/\chi_w$  موضحة لـ  $\phi = 1/2$  ولعدة قيم من  $\theta/\theta_0$  بين 0 و 1. لقيم  $\theta/\theta_0$  حتى 3/4، ويظهر التدفق الكلي الامامي مختلفا بين التدفق الامامي بجوار المحور والتدفق العكسي بجوار الجدار. هذه ظاهرة الارتداد والتي تمثل بوضوح تفسير ممكن لانتقال البكتيريا في الحالب من المثانة إلى الكلية في اتجاه معاكس للتفريغ.

ظاهرة الاحتباس Trapping phenomenon. يوضح الشكل (b) 10 شكل  $S$  مقابل  $\chi/\chi_w$  لنسب سعة كبيرة،  $\phi = 0.9$ . النتائج مشابهة لتلك الموضحة في الشكل (a) 10، ما عدا لميزة اضافية. هناك يوجد خطوط تدفق بقيم سالبة لـ  $\chi/\chi_w$ ، على كل خطوط التدفق هذه حيث  $S = 1$ . يكون هذا المائع محبوسا او محصورا وبالتالي يتحرك على ادنى حد مع الموجة نفسها.



الشكل 11 خطوط التدفق في محور اسناد الموجة لمجموعة من السعات والتدفق بحيث ان جرعة مائع محصورة توجد في محور اسناد المختبر.

لتوضيح هذا يبين الشكل 11 مخطط لخطوط التدفق في محور اسناد الموجة كما هو محدد في المعادلة (35)، ولمجموعة من علاقات  $\phi$  و  $\theta$  فان مثل هذا الانحصار يحدث. تنفصل خطوط التدفق المركزية وهناك يوجد منطقة لإعادة الدورة. تحتوي هذه المنطقة على جرعة من المائع والتي تكون في محور اسناد المختبر محصورة مع الموجة بحيث انها تتقدم ككل بسرعة  $c$ . بالرغم من ان هناك دورة داخلية داخل الجرعة الا ان كل جسيمات المائع في الجرعة المحصورة تتحرك بمتوسط سرعة يساوي  $c$ .

### 3.4 مقدار التدفق المرتد Quantity of reflux of flow

لكي نحصل على مقياس لمعدل ارتداد المادة بالنسبة للتدفق الكلي، سوف نستخدم  $\Psi$  كمؤشر لجسيمات المادة ونقوم بحساب المتوسط الزمني للتدفق في محور اسناد المختبر بين المحور وقيمة معينة لـ  $\Psi$ . التدفق اللحظي  $Q_\Psi$  لكل المواد بين المحور والاحداثي  $\Psi$  يكون على النحو التالي:

$$Q_\Psi = \int_0^{Y(\Psi, X, t)} U(X, Y, t) dY. \quad (41)$$

باستخدام التحويلات بين الاطارين (إطار او محور اسناد المختبر والموجة) وتعريف دالة التدفق  $\Psi$  في محور اسناد الموجة وبأخذ المتوسط الزمني على الزمن الدوري  $T$  نحصل على ما يلي:

$$\bar{Q}_\Psi = \Psi + \frac{c}{T} \int_0^T y(\Psi, X, t) dt. \quad (42)$$

حيث ان حساب التكامل يتم عند ثابت  $X$  فإننا يمكن ان نعوض عن  $dt=(1/c)dx$  واجراء التكامل في محور اسناد الموجة. بعمل normalizing بالنسبة لـ  $ca$  وادخال المتغيرات عديمة الوحدات  $\eta$  و  $\chi$  نحصل على ما يلي:

$$\frac{Q_\Psi}{ca} = \chi + \int_0^1 \eta(\chi, \xi) d\xi. \quad (43)$$

هذا له تفسير فيزيائي وهو ان المتوسط الزمني للتدفق في محور اسناد المختبر للمواد بين الاحداثي  $\Psi=0$  و  $\Psi=\Psi$  هو المجموع لـ (a) التدفق المستقر في محور اسناد الموجة بين خطي التدفق و (b) متوسط التدفق في زمن دوري واحد إذا كانت كل المواد في طول موجي واحد بين المحور وخط تدفق محور اسناد الموجة حيث تكون قد انتقلت إلى اليمين كتكتلة صلبة بسرعة  $c$ .

نجد الكمية المتكاملة في المعادلة (43) بحل المعادلة (35) والمكعب لـ  $\eta$  كدالة في  $\zeta$ . ما عدا للحالات المقيدة الخاصة ويجب ايجاد التكامل من خلال التربيع العددي.

اهمية المنحنيات  $\bar{Q}_\Psi$  مقابل  $\Psi$ . بالاعتماد على قيم  $\phi$  و  $\theta$  يكون للمنحنيات  $\bar{Q}_\Psi$  مقابل  $\Psi$  أربع أنواع مختلفة. هذه موضحة في الشكل 12 بحيث ان كلا الاحداثيين normalized بدلالة قيمها عند الجدار. تمثل الوحدة على المقياس الرأسي المتوسط الزمني للتدفق لكامل المادة المارة. يمثل المنحنى I حالة غير الارتداد ولا الحصر. اما المنحنى II فيمثل حالة بدون ارتداد. لكن الجزء من المنحنى بين 0 و a يمثل جرعة محصورة تتحرك بسرعة الموجة. نعبّر عن ارتفاع القاطع a في تدفق الجرعة كجزء من التدفق الكلي. يمثل المنحنى III الارتداد بدون الحصر. بين نقطة الاصل ونقطة b تتقدم المادة في اتجاه الموجة، وبين b والطرف العلوي من المنحنى تتحرك المادة في اتجاه معاكس لاتجاه الموجة. تمثل المسافة  $\mathfrak{R}$  النسبة بين تدفق الارتداد كجزء من التدفق الكلي. والمنحنى IV يمثل الحالة مع الحصر والارتداد.

حد الارتداد Reflux limit. يمكن ايجاد المجموعة من  $\phi$  و  $\theta$  التي يحدث عندها الارتداد بطريقة تحليلية من خلال مفكوك الاضطراب حول النقطة (1,1) في الشكل 12. باعتبار ان خطوط التدفق لمحور اسناد الموجة قريبة جدا من الجدار يمكننا ان نقدم المعامل الصغير

$$\epsilon \equiv \chi - \chi_w = \chi + (1 - \phi\theta). \quad (44)$$

من ثم نفترض ان معادلة خطوط التدفق بجوار الجدار والتي يجب ان تكون قريبة من شكل الجدار تأخذ الصيغة التالية:

$$\eta(\xi; \phi, \theta, \epsilon) = H + a_1(\xi; \phi, \theta)\epsilon + a_2(\xi; \phi, \theta)\epsilon^2 + \dots$$

باستخدام هذا والمعادلة (44) في المعادلة (35) وتحديد المعاملات  $a_1, a_2, \dots$  نحصل على ما يلي:

$$\eta = H - \epsilon - \frac{3}{2} \frac{\epsilon^2}{H} \left( \frac{\phi\theta - 1}{H} + 1 \right) + \dots \quad (45)$$

بتطبيق ذلك على التكامل في المعادلة (43) تكون النتيجة على النحو التالي:

$$\frac{\bar{Q}_\psi}{ac} = \phi\theta - \frac{3}{2} \frac{\epsilon^2(\phi\theta - \phi^2)}{(1 - \phi^2)^{\frac{3}{2}}} + \dots \quad (46)$$

توضح هذه النتيجة ان المنحنيات في الشكل 12 تمتلك جميعها ميل يساوي صفر عند النقطة (1,1). والشرط بان  $\bar{Q}_\psi / \bar{Q}_w$  يزيد عن الوحدة اي ان الارتداد يحدث ببساطة عندما  $\phi\theta < \phi^2$ ، او

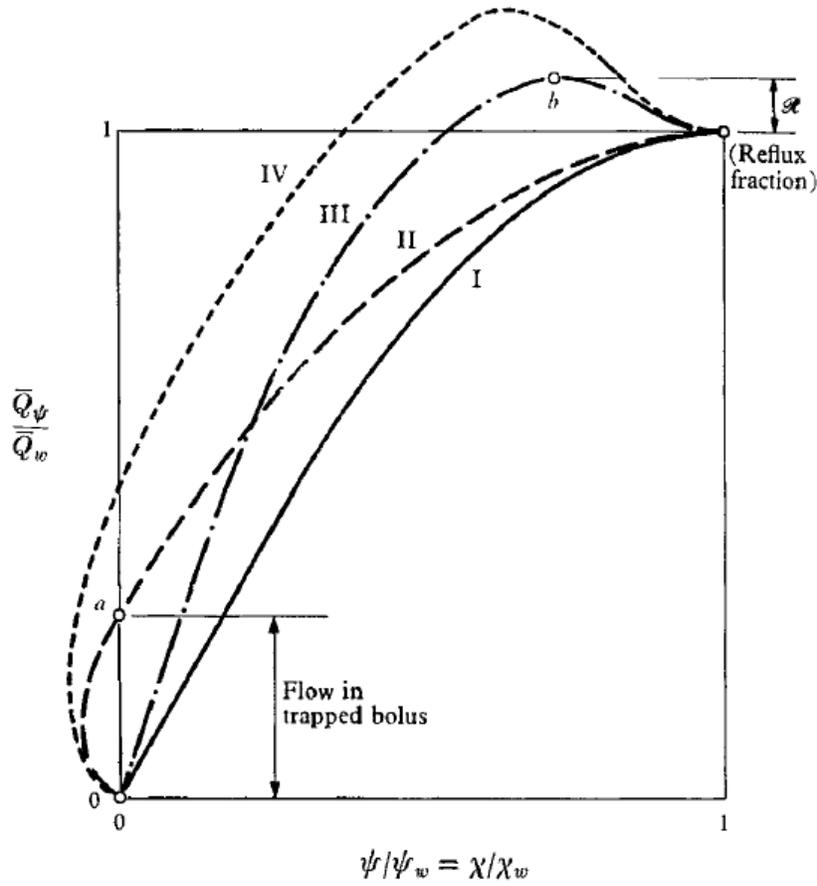
$$\frac{\theta}{\theta_0} < \frac{2 + \phi^2}{3}. \quad (47)$$

الحل لسعات صغيرة Solution for small amplitudes. يمكن تحديد الجزء المرتد  $\mathcal{R}$  في الشكل القريب لقيم صغيرة من  $\phi$ . بتقيد الحسابات لمدى الضخ، فان المعادلة (15) تبين ان  $\phi\theta$  من الرتبة  $\phi^2$  او اقل. علاوة على ان (H-1) من الرتبة  $\phi$ . باختبار المعادلة (35) تقترح ان معادلة خطوط التدفق تتمدد في متسلسلة قوى في المعامل الصغير  $\phi$ :

$$\eta(\xi; \phi, \theta, \chi) = -\chi[1 + b_1(\xi; \theta, \chi)\phi + b_2(\xi; \theta, \chi)\phi^2 + \dots]. \quad (48)$$

بالتعويض عن هذا في المعادلة (35) وتحديد المعاملات  $b_1, b_2, \dots$  نحصل على ما يلي:

$$\eta = -\chi\left\{1 + \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3}\chi^2)(\theta + \sin 2\pi\xi)\phi + \frac{3}{4}[(\chi^2 - 1)^2 \sin^2 2\pi\xi]\phi^2 + \dots\right\}. \quad (49)$$



الشكل 12 منحنيات نوعية للمتوسط الزمني للتدفق  $\bar{Q}_\psi$  بين المحور والقيمة المقابلة لدالة التدفق  $\psi$  في محور اسناد الموجة، مرسومة مقابل القيمة عديمة الوحدات من  $\psi$

عندما نستخدم هذا لحساب التكامل في المعادلة (43) فان النتيجة تكون على النحو التالي:

$$\frac{\bar{Q}_\psi}{ca} = -\frac{3}{2}\chi\phi^2 \left[ \frac{(\chi^2 - 1)^2}{4} + \frac{\theta}{\phi} \left( 1 - \frac{\chi^2}{3} \right) \right]. \quad (50)$$

بوضع  $(d/d\chi)(\bar{Q}_\psi/ca) = 0$  فان القيمة العظمى لـ  $\bar{Q}_\psi$  يمكن ايجادها من المعادلة (50) والتي تحدث عند  $\chi^2 = \frac{1}{3}[1 + (4\theta/\phi)]$  ويمكن حساب الجزء المرتد على النحو التالي:

$$\mathcal{R} = \frac{(\bar{Q}_\psi/c\alpha)_{\max}}{\phi\theta} - 1 = \frac{\left(1 + \frac{12}{2 + \phi^2} \frac{\theta}{\theta_0}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{25\sqrt{5}}{2 + \phi^2} \frac{\theta}{\theta_0}} \left(2 - \frac{\theta/\theta_0}{2 + \phi^2}\right) - 1. \quad (51)$$

#### 4.4. حدود الحصر The trapping limit

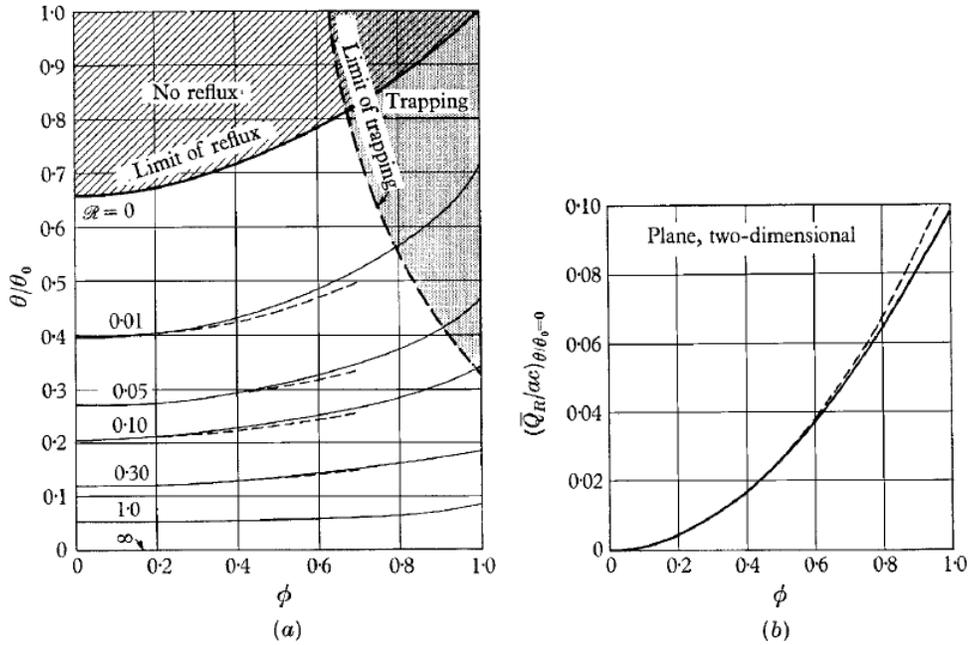
بالانطلاق من المعادلة (35) فانه من الممكن ان نوضح ان  $\chi=0$  ليست فقط على المحور ولكن على المنحنى ايضا وتعرف بالعلاقة التالية:

$$\eta^2 = H^2 \frac{3\phi\theta - 2 + \phi \sin 2\pi\xi}{\phi(\theta + \sin 2\pi\xi)}. \quad (52)$$

بتحليل هذه المعادلة يتضح لنا ان المنحنى حقيقي ويقطع الخط المركزي ويقع داخل الانبوبة إذا كان

$$\frac{(2 - \phi)(2 + \phi^2)}{9\phi^2} < \frac{\theta}{\theta_0} < \frac{(2 + \phi)(2 + \phi^2)}{9\phi^2}. \quad (53)$$

هذه هي الشروط التي يجب ان تتوفر بالقرب من خطوط التدفق لتشكل جرة محصورة تتحرك بسرعة الموجة.



الشكل 13 مخططات لحالة المستوى (a) حدود الحصر وحدود الارتداد ومنحنيات عند جزء مرتد ثابت  $\mathcal{R}$ ، و (b) التدفق المرتد عديم الوحدات للحد  $\theta/\theta_0$  والخطوط المتقطعة هي مفكوك الحل حتى  $\phi^2$ .

#### 5.4. الخلاصة البيانية A graphical summary

يعبر الشكل (a) 13 بدقة عن النتائج العملية الهامة في مدى  $0 < \theta < \theta_0$ . باستخدام  $\phi$  و  $\theta/\theta_0$  كإحداثيات، يمكن توضيح نظامي الارتداد والحصر، وكذلك المنحنيات الخاصة بالجزء الثابت من الارتداد. لـ  $\phi \geq 0.1$ ، وجدت  $\mathcal{R}$  من خلال التكامل العددي للمعادلة (43)، باستخدام تفسير الشكل 12. تم حساب المنحنيات المقطعة لثابت  $\mathcal{R}$  من المعادلة (51)، والتي تمثل الحل الممتد حتى الحدود من الرتبة  $\phi^2$ ، والتي تتفق بشكل جيد حتى  $\phi = 0.7$ . تم حساب حد الارتداد من المعادلة (53)، والحد الأعلى للمعادلة (53) ينطبق فقط على  $\theta > \theta_0$ ، خارج مدى الضخ. من منحنى حد الارتداد في الشكل a (13)، يظهر ان الارتداد يمكن ان يكون شائعا في مدى الضخ، لأنه يحدث لقيم  $\theta/\theta_0$  حتى ما يقارب 0.7، مع ساعات موجة صغيرة، ولقيم  $\theta/\theta_0$  حتى الوحدة تقريبا مع ساعات موجة كبيرة.

جزء الارتداد  $\mathcal{R}$  صغيرة جدا عندما  $\theta/\theta_0$  تزيد عن نصف قيمة حد الارتداد. وعندما  $\theta/\theta_0$  تكون صغيرة على الجانب الاخر اي ما يقارب 0.05 او اقل فان  $\mathcal{R}$  تكون 100% او أكثر. في الحقيقة عندما  $\theta/\theta_0$  تؤول إلى الصفر فان  $\mathcal{R}$  تؤول إلى ما لانهاية، لان التدفق الكلي يؤول إلى الصفر، في حين ان تدفق الارتداد يبقى محدودا. لهذا فانه من المفيد ان نعرف المقدار المطلق لتدفق الارتداد  $\bar{Q}_R$  لقيم صغيرة من  $\theta/\theta_0$ . هذا موضح في الشكل (b) 13 كدالة في  $\phi$  لحالة محدودة وهي  $\theta/\theta_0 = 0$ . يمثل المنحنى المقطع الحل الموسع حتى الحدود من الرتبة  $\phi^2$ ، وهذا متفق بشكل مدهش حتى إلى القيمة  $\phi = 1$ . باستخدام القيم لـ  $(\bar{Q}_R/ac)_{\theta=0}$  المعطى بالشكل (b) 13، فان جزء الارتداد لقيم صغيرة جدا من  $\theta/\theta_0$  يمكن ان تقرب على النحو التالي:

$$(\mathcal{R}_{\theta/\theta_0 \rightarrow 0}) \frac{\theta}{\theta_0} \approx \frac{2 + \phi^2}{3\phi^2} \left( \frac{\bar{Q}_R}{ac} \right)_{\theta/\theta_0=0}. \quad (54)$$

#### 6.4. التحقق العملي من الارتداد Experimental verification of reflux

اجريت تجربة اولية للتحقق من التوقع النظري للارتداد وهذه التجربة موضحة في الشكل 6. تم حقن مائع ملون بالقرب من الجدار عند  $\theta = 0$ . وجد ان المائع الملون قد تحرك بشكل متبادل مع الموجة وعكسها، لكن بإزاحة جديدة لكل دورة معاكسة للموجة. كما ان المسقط له نفس خصائص المنحنى المتصل بدء عند  $\eta_0 = 0.8$  في الشكل 9.

## 5. تفاصيل حركة المائع (حالة التماثل المحوري) (Details of fluid motion (axisymmetric case))

المبادئ والطرق لحالة التماثل المحوري هي مماثلة تماما مع الحالة المستوية، بالرغم من ان تفاصيل الحسابات أكثر تعقيدا. نلخص هنا فقط النتائج الأساسية.

### 1.5. توزيع السرعة ودالة التدفق لإطار الموجة stream function

$$\frac{U}{c} = 2 \left( 1 + \frac{1}{H^2} \frac{q}{\pi a^2 c} \right) \left( 1 - \frac{\eta^2}{H^2} \right), \quad (55)$$

$$\frac{V}{c} = 2\pi \frac{b}{\lambda} \left[ 2 \frac{q}{\pi a^2 c} \frac{\eta}{H^3} - \left( 1 + \frac{2}{H^2} \frac{q}{\pi a^2 c} \right) \frac{\eta^3}{H^3} \right] \cos 2\pi(\xi - \tau), \quad (56)$$

حيث ان  $q/\pi a^2 c$  تعطى بالمعادلة (25). القيم العظمى والدنيا لـ  $U/c$  على المحور موضحة في الشكل 14 لـ  $\Theta = \Theta_0$  و  $\Theta = 0$ .

بإدخال دالة تدفق ستوكس في إطار الموجة والتي تعرف من خلال

$$d\psi = 2\pi r u dr - 2\pi r v dx,$$

وتكون النتيجة على النحو التالي

$$\frac{\psi}{\pi a^2 c} = \eta^2 - \frac{\eta^4}{H^2} + \frac{q}{\pi a^2 c} \left( 2 \frac{\eta^2}{H^2} - \frac{\eta^4}{H^4} \right), \quad (57a)$$

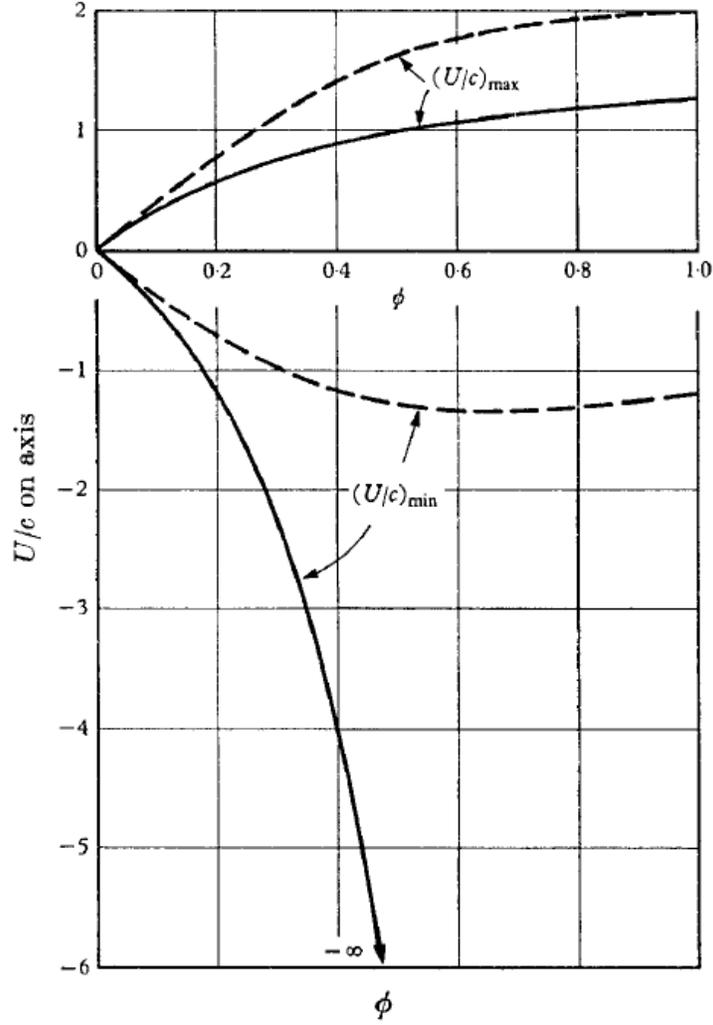
$$\psi_w / \pi a^2 c = q / \pi a^2 c. \quad (57b)$$

### 2.5. حد الحصر Trapping limit

تتحرك جرة مائع محصورة مع الموجة عندما

$$\frac{(1-2\phi)(2+3\phi^2)}{(16-\phi^2)\phi^2} < \frac{\Theta}{\Theta_0} < \frac{(1-2\phi)(2+3\phi^2)}{(16-\phi^2)\phi^2}. \quad (58)$$

الحد الأدنى موضح في الشكل 15، في حين ان الحد الاعلى يحدث فقط لـ  $\Theta > \Theta_0$ ، اي خارج مدى الضخ.



الشكل 14 حالة التماثل المحوري. اقصى قيمة واقل قيمة لـ  $U/c$  على المحور لحدين هما  $\Theta=0$  الخط المتصل ولـ  $\Theta=\Theta_0$  الخط المنقطع.

### 3.5. حد الارتداد Reflex limit

حسابات الاضطراب مثل تلك المستخدمة في حالة المستوى تؤدي إلى ان الارتداد يحدث عندما  $\Theta/\Theta_0 < 1$ ، لكن ليس للقيم العالية. أي ان الارتداد يحدث على كامل مدى الضخ، وهذا من الواضح انه قاعدة أكثر من كونها توقع.

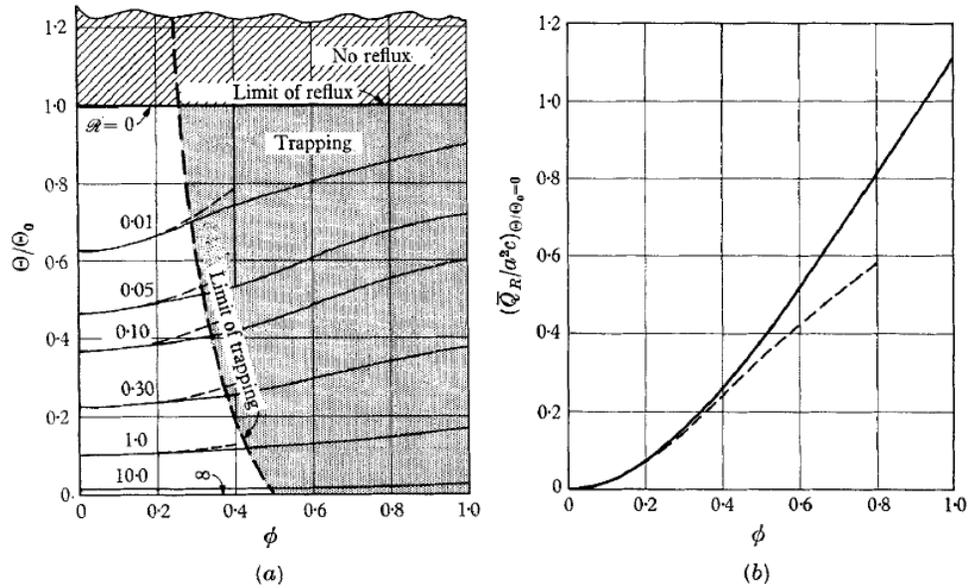
### 4.5 جزء الارتداد لسعة صغيرة Reflex fraction for small amplitude

مرة اخرى باستخدام مفكوك متسلسلة القوى في  $\phi$ ، كما في حالة المستوى فان جزء الارتداد عند  $\phi \rightarrow 0$  يمكن ان يحسب على النحو التالي:

$$\mathcal{R}_{\phi=0} = \frac{(1 + 2[\Theta/\Theta_0])^2}{27\Theta/\Theta_0} \left(4 - \frac{\Theta}{\Theta_0}\right) - 1. \quad (59)$$

## 6.5. الخلاصة البيانية A graphical summary

باستخدام  $\phi$  كإحداثي سيني و  $\Theta/\Theta_0$  كإحداثي صادي فإن الشكل (a) يوضح حد الحصر وحد الارتداد، والمنحنيات لجزء الارتداد الثابت. كما في حالة المستوى فإن الأخير يتطلب تكامل عددي. ما عدا عندما  $\Theta/\Theta_0 > 1/2$  أو أن  $\mathcal{R}$  كبيرة جدا. عندما تؤول  $\Theta/\Theta_0$  إلى الصفر فإن  $\mathcal{R}$  تؤول إلى المالا نهائية. القيمة المطلقة لتدفق الارتداد موضحة في الشكل (b) 15 عند هذا الحد.



الشكل 15 ملخص المخططات لحالة التماثل المحوري: (a) حد الحصر وحد الارتداد ومنحنيات جزء الارتداد الثابت  $\mathcal{R}$  (منطقة الحصر موضحة هنا فقط لحالة  $\Theta/\Theta_0 \leq 1$ ) (b) تدفق الارتداد عديم الوحدات للحد  $\Theta/\Theta_0 = 0$  (الخط المنقطع).

## الملحق A

من بين اعداد رينولد المختلفة  $R$  والتي يمكن ان نعرفها فانه ليس من الواضح اي منها يخدم بشكل أفضل كقياس للنسبة بين القصور الذاتي إلى قوى اللزوجة. للتدفق الذي تكون فيه تأثيرات القصور الذاتي ضعيفة نسبياً، فإن  $R$  المناسبة يمكن ايجادها من خلال حساب حدود القصور الذاتي واللزوجة حل عديم القصور الذاتي، والتعامل مع اللزوجة على اساس حل من الرتبة الصفرية منسجم مع  $R=0$ .

في الحالة الثنائية الابعاد

$$R \equiv \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) / \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

والتي يمكن ايجادها بسهولة من المعادلات (3) و(32) و(34) والتي لها القيم التالية على المحور:

$$R = \frac{\pi ac a}{2 \nu \lambda} \frac{(\phi\theta - 1)(3\phi\theta - 2 + \phi \sin 2\pi\xi) \cos 2\pi\xi}{\theta + \sin 2\pi\xi}$$

حيث ان كلا من  $\theta$  و  $\phi\theta$  تقع في المدى بين الصفر والوحدة فان R تميز التدفق بشكل مناسب مع تأثير صغير للقصور الذاتي وتكون  $R = (ac/v)(a/\lambda)$ . كما يمكن اثبات صحة نفس النتيجة في حالة التماثل المحوري.

## الملحق B

نعبر عن معادلات نافير وستوكس الكاملة لحالة المستوى في احداثيات اطار الموجة وبدلالة دالة التدفق في اطار الموجة على النحو المختزل التالي:

$$\psi_y \nabla^2 \psi_x - \psi_x \nabla^2 \psi_y = \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi: \quad (B1)$$

انظر Schlichting (1969 الصفحة 69). كل الكميات الفيزيائية في المعادلة (B1) يمكن ان تقرب لمقياس الوحدة من خلال ادخال المتغيرات عديمة الوحدات التالية:

$$\xi \equiv x/\lambda, \quad \eta \equiv y/a, \quad \chi \equiv \psi/ac,$$

$$\beta \equiv a/\lambda, \quad R \equiv (ac/\nu) \beta.$$

بالتعبير عن هذه المتغيرات فان المعادلة (B1) تصبح على النحو التالي:

$$R[\chi_\eta(\chi_{\eta\eta\xi} + \beta^2 \chi_{\xi\xi\xi}) - \chi_\xi(\chi_{\eta\eta\eta} + \beta^2 \chi_{\eta\xi\xi})] = \chi_{\eta\eta\eta\eta} + 2\beta^2 \chi_{\eta\eta\xi\xi} + \beta^4 \chi_{\xi\xi\xi\xi}. \quad (B2)$$

وعليه فان المعاملين  $\beta$  و  $R$  تتحكمان في المسألة: والحل ممكن ان يكون كمفكوك متسلسلة القوى لهما، إذا كانا صغيرين بالمقارنة مع الوحدة. لحد من الرتبة الصفرية في المتسلسلة فان المعادلة (B2) تعطي

$$\chi_{\eta\eta\eta\eta} = 0. \quad (B3)$$

بالرغم من ان هذا يقابل  $\beta \ll 1$  و  $R \ll 1$  فان المعادلة (B3) تبقى متحقق حتى لقيم عالية من  $R = ac/v$  بشرط ان الرقم الموجي  $\beta$  يكون صغيرا بما فيه الكفاية. الان تكون الشروط الحدية للمعادلة (B3) على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \chi &= 0, \quad \chi_{\eta\eta} = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0; \\ \chi_{\eta} &= -1, \quad \chi = q/ac \quad \text{at} \quad \eta = H. \end{aligned}$$

باستخدام هذه يكون الحل الذي نحصل عليه هو المعطى في المعادلة (35). ويمكن اجراء تحليل مشابه لحالة التماثل المحوري.