



إيجاد معامل الانكسار المركب لصفحة من الانعكاس والنفاذ: حل تحليلي

Complex refractive index of a slab from reflectance and transmittance: analytical solution

Enrico Nichelatti

الخلاصة

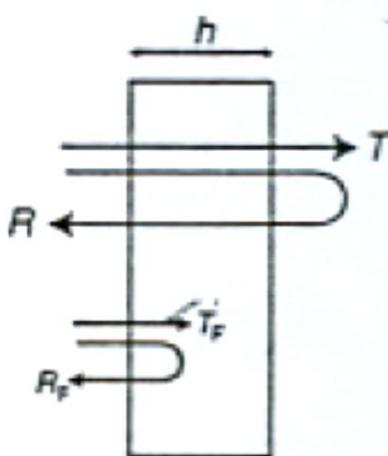
اشتقاق صيغة تحليلية تسمح بحساب معامل الانكسار المعقد لصفحة مستوية من شدة الانعكاس العمودي والنفاذ.

1. المقدمة Introduction

طريقة معتمدة لدراسة الخواص الضوئية للأفلام الرقيقة، التي تعرف باسم الثوابت الضوئية لأرضية الترسيب التي سوف يترسب عليها الفيلم مهمة جدا. إذا كانت الأرضية عبارة عن صفحة ذات وجهين متوازيين مستويين، يمكن قياس شدة طيف الانعكاس والنفاذ، $R(\lambda)$ و $T(\lambda)$ ، بواسطة المطياف (spectrophotometer) – حيث λ هي الطول الموجي للضوء في الفراغ – قبل ترسيب الفيلم تعتبر طريقة تستخدم كثيرا نظرا لسهولة العملية، في الحصول على تشتت معامل الانكسار المركب لمادة الأرضية.

طبقا لمعلومات المؤلف فان صيغة مفصلة لحساب بطريقة تحليلية معامل الانكسار المركب $n(\lambda) - ik(\lambda)$ للأرضية من $R(\lambda)$ و $T(\lambda)$ لم يسبق ان أشير له في البحوث العلمية. في بعض البحوث العلمية المنشورة حول الخصائص الضوئية للفيلم الرقيق، حيث ان المشكلة تتعلق في إيجاد الثوابت الضوئية لأرضية الترسيب تم مناقشتها بشكل مفصل، إلا ان الحل تم التوصل له من خلال المعالجة العددية [1,2]. في بحوث علمية أخرى تم التركيز أكثر على اشتقاق الثوابت الضوئية للصفحة من القياسات الطيفية، ومن ثم استخدمت طرق عددية كخطوة ابتدائية لحل المشكلة [3,4].

الهدف من هذه النشرة العلمية هو اشتقاق الحل التحليلي الكامل للمشكلة العكسية، المشار لها بـ $(R,T) \rightarrow (n,k)$ ، وإيجاد كلا من n و k من R و T للصفحة ذات الأوجه المتوازية والمستوية. الحل التحليلي المفترض يمثل طريقة مماثلة بالمقارنة مع الطرق العددية لحساب $n(\lambda)$ و $k(\lambda)$: بالأساس باستخدام الحل التحليل فان هذه المهمة يمكن ان تنجز عند أي طول موجي مختار حتى بمساعدة آلة حاسبة جيبية.



الشكل 1. صفحة ذات امتصاص جزئي بوجهين متوازيين مستويين، h هو السمك الهندسي للصفحة، R و T معامل شدة الانعكاس والنفاذ الكلية للصفحة، R_F ، T_F معامل الانعكاس والنفاذ لوجه واحد.



2. الانعكاس والنفاذ للصفحة (المسألة المباشرة) Reflectance and transmittance of a slab (direct problem)

قبل ان نقوم بالمحاولة لحل المسألة العكسية، $(R, T) \rightarrow (n, k)$ ، من المفيد ان نقوم في البداية باستدعاء المعادلات للمسألة المباشرة، $(n, k) \rightarrow (R, T)$ ، التي تحتوي على حساب معاملات شدة الانعكاس والنفاذ بمجرد ان نعرف قيم الثوابت الضوئية للصفحة.

لهذا دعنا نعتبر صفحة ذات امتصاص جزئي بوجهين متوازيين ومستويين مغمورة في الهواء (الشكل 1) ونفترض ان الضوء يسقط عموديا على الصفحة. لنفترض ان $n(\lambda) - ik(\lambda)$ هي معامل الانكسار المركب للصفحة. معاملات شدة الانعكاس والنفاذ لكل وجه من أوجه الصفحة هو، $R_F(\lambda)$ و $T_F(\lambda)$ ، (تم حذف الاعتماد التفصيلي على λ للتبسيط) [5,6]

$$R_F = \left| \frac{n - ik - 1}{n - ik + 1} \right|^2 \quad (1)$$

$$T_F = \frac{4n}{|n - ik + 1|^2} \quad (2)$$

المعادلات أعلاه تبقى متحققة لسقوط الضوء من الهواء ومن داخل أرضية الترسيب، ومجموعهما يعطي $1 = T_F + R_F$ ، كما يمكن ان يتحقق من ذلك بسهولة، وهذا يمثل الحفاظ على الطاقة عند وجه الصفحة. ولكن تحقق قانون الحفاظ على الطاقة وتحديد شدة الانعكاس R_F نفسها للضوء الساق من داخل الصفحة يستحق المناقشة، لان ازدواج الموجة المنعكسة مع الساقطة من داخل وسط ماص [6]. لهذا السبب فان استخدام R_F (لشعاع الضوء الساقط من داخل الصفحة) في أي نظرية يجب ان يكون محدود لمادة الصفحة والتي هي تمتص بشكل جزئي (على سبيل المثال المواد العازلة): بكتابة الصيغة بشكل مفصل لـ $R_F + T_F$ معطى في المرجع [6]، من الممكن توضيح ان قانون الحفاظ على الطاقة أعلاه متحقق تقريبا عندما $k^2 \ll n$. وعليه فان تعريف R_F في مثل هذه الحالات مقبولا.

معاملات الانعكاس الكلي والنفاذ للصفحة، $R(\lambda)$ و $T(\lambda)$ ، يمكن ان يحسب من المعادلات (1) و (2) مع افتراضات غير محدودة على مشاركة الانعكاس المتعدد لأوجه الصفحة. نفرض ان الصفحة سميكة ضوئيا،



أي ان سمكها الهندسي h ، اكبر بكثير من طول الترابط (coherence length) للضوء، وبالتالي فان التداخلات الضوئية بين الانعكاسات المتعددة تلاشي بعضها البعض [7] والافتراضات الغير متزامنة لشدة الانعكاسات المتعددة يمكن ان تعتبر [6]. بوضع $\alpha(\lambda) = 4\pi k(\lambda)/\lambda$ كما في معامل الامتصاص لمادة الصفيحة، وهذا يؤدي إلى ما يلي:

$$R = R_F + R_F T_F^2 \exp(-2\alpha h) \sum_{m=0}^{\infty} [R_F \exp(-\alpha h)]^{2m} \quad (3)$$

$$T = T_F^2 \exp(-\alpha h) \sum_{m=0}^{\infty} [R_F \exp(-\alpha h)]^{2m} \quad (4)$$

من ذلك نستدعي العلاقة

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{1}{1-q}$$

لـ $|q| < 1$ نحصل على [7]

$$R = R_F + \frac{R_F T_F^2 \exp(-2\alpha h)}{1 - R_F^2 \exp(-2\alpha h)} \quad (6)$$

$$T = \frac{T_F^2 \exp(-\alpha h)}{1 - R_F^2 \exp(-2\alpha h)} \quad (7)$$

المعادلتين (6) و(7) من خلال المعادلتين (1) و(2)، تمثل الحل للمسألة المباشرة $(R, T) \rightarrow (n, k)$.



3. معامل الانكسار المركب للصفحة (المسألة العكسية) Complex refractive index of a slab (inverse problem)

1.3 الخطوة 1: استنتاج R_F و αh من R و T

لإيجاد الحل للمسألة المعكوسة، $(R, T) \rightarrow (n, k)$ ، الذي يحتوي على حساب n و k من R و T ، دعنا في البداية نشق R_F و αh من R و T . ولهذا دعنا نعيد ترتيب المعادلة (6) على النحو التالي:

$$R - R_F = \frac{R_F T_F^2 \exp(-2\alpha h)}{1 - R_F^2 \exp(-2\alpha h)}. \quad (8)$$

الآن بقسمة المعادلة (8) على المعادلة (7)، ومن ثم اخذ اللوغاريتم الطبيعي للنتيجة نحصل على

$$\alpha h = \ln\left(\frac{R_F T}{R - R_F}\right). \quad (9)$$

بالتعويض المعادلة (9) في المعادلة (7) وباستخدام $T_F = 1 - R_F$ ، نحصل على معادلة جبرية من الدرجة الثانية في المجهول R_F نحصل على:

$$(2 - R)R_F^2 - [2 + T^2 - (1 - R)^2]R_F + R = 0 \quad (10)$$

وهذا له حل مقبول هو

$$R_F = \frac{(2 + T^2 - (1 - R)^2) - \sqrt{[2 + T^2 - (1 - R)^2]^2 - 4R(2 - R)}}{2(2 - R)}. \quad (11)$$

الحل الرياضي الآخر للمعادلة (10)، والذي يختلف عن المعادلة (11) بعكس الإشارة أمام الجذر التربيعي، لا يمكن قبوله لأنه يؤدي إلى قيم R_F مثل $R_F \geq R$ ، وهذا يتناقض مع المعادلة (3).

لاحظ ان المعادلة (11)، ان R_F معبر عنها بدلالة R و T فقط، ويمكن ان نثبت هذه الحقيقة من خلال كتابة $R_F = R_F(R, T)$ ، حيث ان اعتماد الطول الموجي من خلال $R(\lambda)$ و $T(\lambda)$ مفهوم. بمجرد الحصول على



R_F من خلال المعادلة (11)، فإن قيمتها يمكن التعويض عنها في المعادلة (9) لإيجاد αh كدالة في R و T (ولكننا لم نقم بسرد صيغة αh بالتفصيل للتبسيط).

2.3 بعض العلاقات المفيدة لـ n و k

الآن، من المفيد ان نشق بعض العلاقات لأجزاء الحقيقية والتخيلية لمعامل الانكسار المركب n و k .

لنكتب معامل الانكسار المركب لمادة الصفيحة في الصيغة القطبية أي ان

$$n - ik = \rho \exp(i\phi) \quad (12)$$

حيث ان ρ و ϕ تحدد القيمة الحقيقية للدوال في λ . باستخدام هذه الصيغة القطبية، من المعادلات (1) و (2)، وبعد بعض الإجراءات الرياضية نحصل على

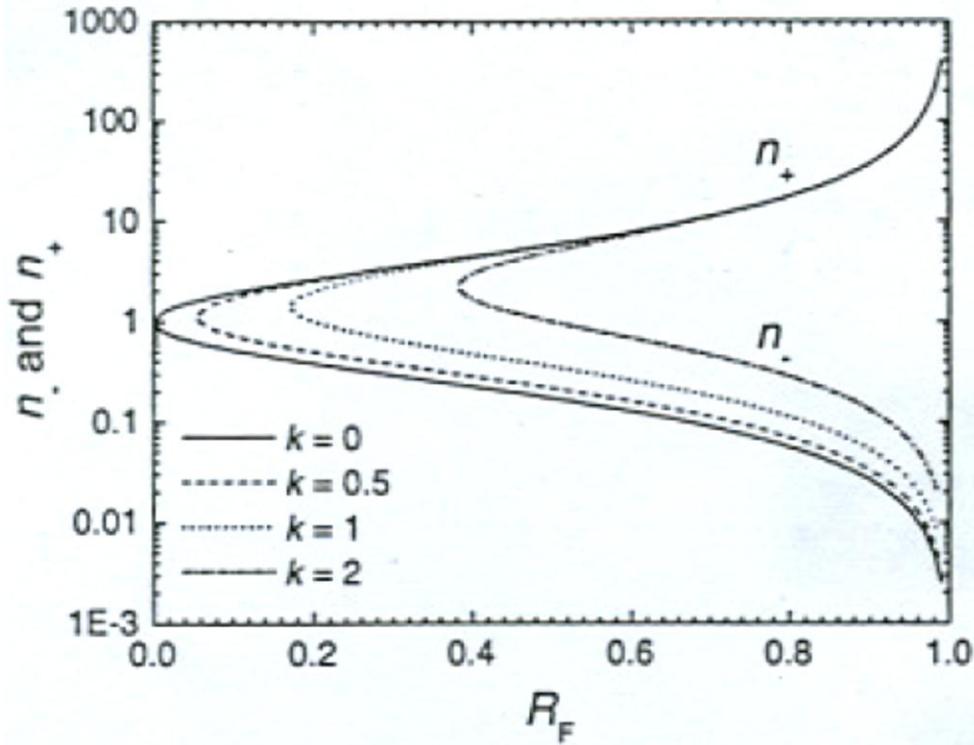
$$|\rho \exp(i\phi) + 1|^2 = \rho^2 + 2\rho \cos \phi + 1 = \frac{4n}{T_F} \quad (13)$$

$$|\rho \exp(i\phi) - 1|^2 = \rho^2 - 2\rho \cos \phi + 1 = \frac{4nR_F}{T_F}. \quad (14)$$

بجمع وطرح الصيغتين أعلاه نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$\rho^2 = 2n \frac{1 + R_F}{1 - R_F} - 1 \quad (15)$$

$$\cos \phi = \frac{n}{\rho} \quad (16)$$



الشكل 2. اعتماد n_+ (الأفرع التي فيها $dn/dR_F > 0$) و n_- (الأفرع التي فيها $dn/dR_F < 0$) على الانعكاس R_F لوجه واحد من الصفيحة لبعض قيم معامل الاضمحلال k (extinction coefficient) المكان الذي يلتقي فيه الفرعين موضح بالصيغة $n_{\pm} = (1 + R_F)/(1 - R_F)$.

حيث تم استخدام العلاقة $T_F = 1 - R_F$. بمقارنة المعادلتين (15) و (16)، نحصل على النتيجة التالية لـ $\cos \phi$ على النحو التالي:

$$\cos \phi = \frac{n}{(2n \frac{1+R_F}{1-R_F} - 1)^{1/2}} \quad (17)$$

لان ϕ هي قيمة حقيقية، $|\cos \phi| \leq 1$. وعليه فان الروابط التالية يمكن ان تنشئ لـ n من المعادلة (17) بعد إجراء بعض المعالجات الرياضية:



$$\frac{1 - R_F^{1/2}}{1 + R_F^{1/2}} \leq n \leq \frac{1 + R_F^{1/2}}{1 - R_F^{1/2}}. \quad (18)$$

لان $\rho^2 = n^2 + k^2$ ، نحصل من المعادلة (15) الصيغ التالية لكل من n و k (احتفظنا بـ k فقط الجذر التربيعي الموجب لأسباب فيزيائية):

$$n = n_{\pm} = \frac{1 + R_F}{1 - R_F} \pm \left[\frac{4R_F}{(1 - R_F)^2} - k^2 \right]^{1/2} \quad (19)$$

$$k = \left[2n \frac{1 + R_F}{1 - R_F} - (n^2 + 1) \right]^{1/2}. \quad (20)$$

مبدئيا كلا الحلين مدرجين في المعادلة (19)، n_+ و n_- ، مقبولين من الناحية الرياضية، والحل الأنسب يجب ان يختار على أسس فيزيائية. من الملاحظ ان الحل n_+ عادة هو الأفضل للمواد العازلة ($k \ll n$, $n > 1$) لان

$$n_+ \simeq \frac{1 + R_F^{1/2}}{1 - R_F^{1/2}} > 1 \quad n_- \simeq \frac{1 - R_F^{1/2}}{1 + R_F^{1/2}} < 1 \quad (21)$$

عندما $k^2 \ll 4R_F/(1-R_F)^2$. على الجانب الآخر إذا كانت $k^2 = 4R_F/(1-R_F)^2$ ، فان الحلين يتوافقا وتكون $n_+ \equiv n_- = (1+R_F)/(1-R_F)$.

الشكل 2 يوضح اعتماد n_+ و n_- على الانعكاس على الوجه R_F ، من قيم تمثل k ، كما هي محسوبة من المعادلة (19). في هذا الشكل الأفرع n_+ يمكن ان تميز عن أفرع n_- لان السابقة تنمو بوتيرة مفردة (monotonically) مع R_F ، في حين ان الأخيرة تتناقص مع R_F . بالفحص الدقيق في الشكل 2، يمكن استنتاج ان اختيار الحل الأنسب لـ n (أي ان n_+ أو n_-) على أسس فيزيائية يجب ان يكون مباشر نسبيا وفي معظم الحالات.

في المعادلة (20)، الموجب في التعبير تحت الجذر التربيعي مضمون في المعادلة (18). على جانب آخر، فرض الموجب في التعبير تحت الجذر التربيعي في المعادلة (19) والموجب (لأسباب فيزيائية) لـ k تؤدي إلى الروابط التالية لـ k :



$$0 \leq k \leq \frac{2R_F^{1/2}}{1 - R_F}. \quad (22)$$

مثالاً الحد على الطرف الأيمن في الشرط الأخير أيضاً يحدد الحد الأدنى الرياضي لسماك الصفيحة. وفي الحقيقة، باعتبار أن $k = \lambda\alpha/(4\pi)$ والمعادلة (9)، نحصل على

$$h \geq \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1 - R_F}{2R_F^{1/2}} \ln\left(\frac{R_F T}{R - R_F}\right). \quad (23)$$

ولكن في معظم الحالات هذا الحد الأدنى يمثل سمك قليل جداً أي أن يعادل في المقدار λ .

3.3 الخطوة 2: الكشف عن n و k من R_F و h

الصيغة الأخيرة لعامل اضمحلال الصفيحة $k = k(R, T)$ ، يمكن الحصول عليه ببساطة من المعادلة (9) باعتبار أن $\alpha = 4\pi k/\lambda$. السمك الهندسي للصفيحة h يفترض أنه معروف وبالتالي نحصل على:

$$k(R, T) = \frac{\lambda}{4\pi h} \ln\left[\frac{R_F(R, T)T}{R - R_F(R, T)}\right]. \quad (24)$$

هنا أيضاً اعتماد على الطول الموجي من خلال $R(\lambda)$ و $T(\lambda)$ وهذا مفهوم بجانب الاعتماد الواضح من خلال المعامل $\lambda/(4\pi h)$. في المعادلة أعلاه تحسب k من R و T (أيضاً من خلال المعادلة (11))، و h و λ اعتبرنا معاملات، وهذه الحقيقة موضحة من خلال كتابة $k = k(R, T)$.

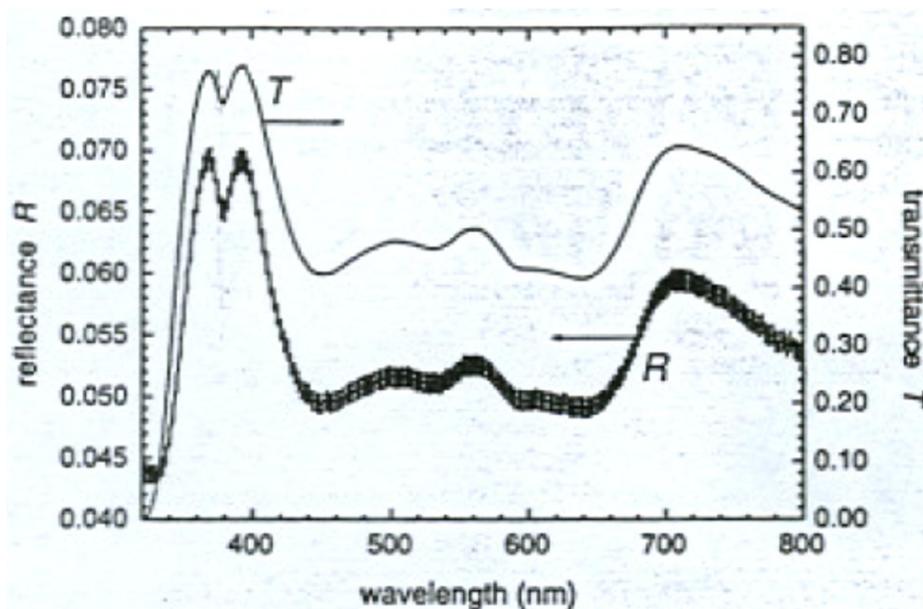
الآن المعادلة (24) يمكن أن يتم التعويض بها في المعادلة (19) لتنتج أيضاً الجزء الحقيقي، n ، لمعامل الانكسار الحقيقي. ولهذا فإن الصيغة النهائية لـ $n = n(R, T)$ تكون على النحو التالي:

$$n_{\pm}(R, T) = \frac{1 + R_F(R, T)}{1 - R_F(R, T)} \pm \left\{ \frac{4R_F(R, T)}{[1 - R_F(R, T)]^2} - \left(\frac{\lambda}{4\pi h} \right)^2 \ln^2 \left[\frac{R_F(R, T)T}{R - R_F(R, T)} \right] \right\}^{1/2} \quad (25)$$

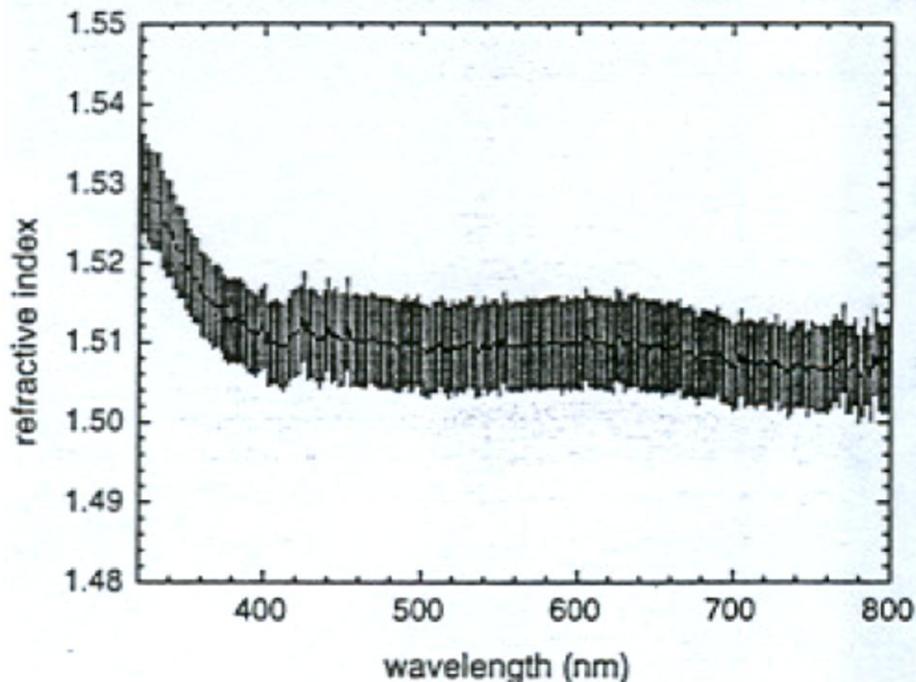
المعادلتين (24) و(25)، مع بعض مع المعادلة (11)، تمثل الحل التحليلي الذي نبحت عنه للمسألة العكسية $(R, T) \rightarrow (n, k)$. حل معامل الانكسار الأنسب n_+ أو n_- ، يجب ان يتم اختياره بالرجوع إلى الظروف الفيزيائية، كما سبق مناقشته.

4. تطبيق على الحالة الحقيقية Application to a real case

كمثال تطبيقي تم تشخيص عينة ماصة بالطريقة المقترحة. كانت العينة من زجاج رمادي يستخدم في المباني المعمارية له سمك هندسي $h=(4.9\pm 0.1)\text{mm}$. شدة طيف الانعكاس والنفوذ للعينة $R(\lambda)$ و $T(\lambda)$ موضح في الشكل 3 وقد تم قياسه باستخدام مطياف Perkin-Elmer Lambda 19.



الشكل 3. شدة الانعكاس المقاسة (التدرج الأيسر)، $R(\lambda)$ والنفوذ (التدرج الأيمن) $T(\lambda)$ للزجاج الرمادي المستخدم في التطبيقات المعمارية. الخطأ يمثل الشك في القياسات.



الشكل 4. منحنى تشتت معامل الانكسار للزجاج الرمادي كما حسب بواسطة المعادلة (25). قدر الخطأ بواسطة تحليل توليد الخطأ القياسي.

القدرة التحليلية (عرض النطاق Bandwidth) كانت $\Delta\lambda = 1 \text{ nm}$ على كل نطاق الطيف تحت الدراسة، حيث تم تقدير أعظم طول ترابط للضوء (coherence length) هو $640 \mu\text{m}$. هذا يضمن ان الزجاج يعتبر سميك من الناحية الضوئية.

منحنيات تشتت معامل الانكسار ومعامل الاضمحلال موضحة في الشكل 4 و 5، حيث تم حسابها من خلال المعادلات (25) و (24) على التوالي. بين الحلين المتوفرين لمعامل الانكسار، تم اختيار الحل $n_+(\lambda)$ على انه هو الحل الصحيح فيزيائيا على كل مدى الطول الموجي لان $n_-(\lambda) < 1$ ، والذي هو غير مناسب للزجاج. المنحنيات الموضحة في الشكل 4 و 5 تم التحقق من صحتها من خلال استخدامها في حساب شدة طيف الانعكاس الكلي والنفاذ الكلي من خلال المعادلتين (6) و (7) ومن ثم مقارنة الطيف المحسوب مع الطيف المقاس. إعادة إنتاج الطيف المقاس كان ناجحا تماما.



5. الاستنتاج Conclusion

وجد ان الحل التحليلي في هذا البحث العلمي يمثل بديل مفيد للطرق العددية لاستنتاج معامل الانكسار المركب لصفحة من خلال قياسات الانعكاس والانكسار. بجانب المزايا الواضحة لاستخدام الحل التحليلي بالنسبة لحل العددي، فانه يبين ان المسألة العكسية، $(n, k) \rightarrow (R, T)$ ، تسمح بمجموعتي حلول رياضية، أي ان (n_+, k) و (n_-, k) ، المجموعة المناسبة يجب ان تختار بحيث تطابق الاعتبارات الفيزيائية. علاوة على ذلك فان الفترات الرياضية والفيزيائية المتوفرة لـ n و k تم استنتاجها من المعادلات (18) و(22). باعتبار الارتباطات لمدى هذه الفترات لكلا من n و k في الحالات الصعبة، مثل تحليل أرضيات الترسيب المعتمدة التي تكون فيها T مقارنة مع حساسية الأجهزة.

تمت الترجمة بواسطة المركز العلمي للترجمة

www.trgma.com

16-8-2011