



## *Chapter 3*

### **Magnetohydrodynamics (MHD)**

علم يدرس تأثير المجال المغناطيسي والتوصيل الكهربائي على  
السوائل و الغازات مثل البلازما

ترجمة

المركز العلمي للترجمة

[www.trqma.com](http://www.trqma.com)

3-3-2009



## Chapter 3: Magnetohydrodynamics (MHD)

معادلات المائع هي الأكثر استخداما لوصف البلازما الغير متجانسة. في حين أن طور المائع الذي تتحكم فيه معادلة بولتزمان تعتبر مثالا على ذلك، كما وان العديد من التطبيقات لا تتطلب دقة عالية في تحديد توزيع السرعة عند أي نقطة في الفراغ. ويمكن الحصول على معادلة المائع للغازات والبلازما من معادلة بولتزمان أو من الممكن اشتقاقها بالاعتماد على قوانين الحفظ على الكتلة وكمية الحركة والطاقة للمائع. في هذا الجزء القادم سوف نشق مجموعة من معادلات المائع العادية للبلازما، كما وسنقوم بفحص خواص الاتزان والأمواج لهذه المعادلات.

### 1.3 اشتقاق معادلات البلازما المائعة

#### 3.1 Derivation of the Fluid Plasma Equations

##### 1.1.3 تعريفات

المعادلات الخاصة بالمائع العادي والغازات وكذلك المائع المغناطيسي (البلازما) يمكن أن نحصل عليها من المعادلة 23.1 بطريقة منهجية. بتعريف 0th و 1th و 2th لـ moment of integral (وهي طريقة تحليلية

لإيجاد حلول عددية تقريبية) على دالة التوزيع  $f_s$ ، وكثافة كتلة  $\rho_s$ ، وسرعة المائع  $u_s$  وتنسور الضغط  $\underline{\underline{P}}_s$

$$\rho_s(\mathbf{x}, t) = m_s \int_{-\infty}^{\infty} d^3v f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{n_s} \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \mathbf{v} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (3.2)$$

$$\underline{\underline{P}}_s(\mathbf{x}, t) = m_s \int_{-\infty}^{\infty} d^3v (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (3.3)$$

حيث المعامل  $s$  يشير إلى مجموعة الجسيمات والتي يمكن أن تكون الكاتيونات وايونات مختلفة. بهذه التعريفات من الممكن أن نحصل على الكثافة العددية  $n_s(\mathbf{x}, t) = \rho_s/m_s$  وكثافة الشحنة  $\rho_{c,s}(\mathbf{x}, t) = q_s n_s$  وكثافة كمية الحركة  $P_s(\mathbf{x}, t) = \rho_s u_s$  وكثافة التيار  $j_s(\mathbf{x}, t) = q_s u_s$ ، والضغط  $p_s(\mathbf{x}, t) = 1/3 T_r(\underline{\underline{P}}_s)$  حيث أن



كتلة الجسم هي  $m_s$  وشحنته  $q_s$ . في الأجزاء التالية سوف نهمل المعامل  $s$  لتبسيط شكل المعادلة ولكننا نذكر القارئ إن هناك مجموعة منفصلة لمعادلات المائع لكل مجموعة من الجسيمات.

معادلات المائع التي حصلنا عليها بطريقة الـ moments لمعادلة بولتزمان هي

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3v \mathbf{v}^i \text{ (Boltzmann Equ.)}$$

ولكي نأخذ في الحسبان حد التصادم في المعادلة (23.1) سوف نعرف

$$Q^p(\mathbf{x}, t) = m \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_c \quad (3.4)$$

$$Q^p(\mathbf{x}, t) = m \int_{-\infty}^{\infty} d^3v (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_c \quad (3.5)$$

$$Q^E(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} m \int_{-\infty}^{\infty} d^3v (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_c \quad (3.6)$$

الشكل الدقيق لهذه الحدود يعتمد على خصائص معينة للنظام والتي لن نتعرض لها في هذه المرحلة.

### 2.1.3 طريقة الـ Moment للمائع

لنقدم مثالا على طريقة الـ moments لمعادلات بولتزمان دعنا نقوم بحساب قيمة الـ  $0^{\text{th}}$  moment للتكامل. الحد الأول من المعادلة يصبح على النحو التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3v \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} d^3v f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{\partial n(\mathbf{x}, t)}{\partial t}.$$

الحد الثاني هو

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3v \mathbf{v} \cdot \nabla f = \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \nabla \cdot (\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) = \nabla \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) n(\mathbf{x}, t))$$



والحد الثالث هو

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3v \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v f = \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} d^2v \left[ \frac{F_i}{m} f \right]_{v_i=-\infty}^{v_i=\infty} - \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \frac{f}{m} \frac{\partial F_i}{\partial v_i}$$

الحدود على الجهة اليمنى من المعادلة أعلاه هي 0 لأن  $f=0$  في حالة  $v_i = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$  لكل مركبة  $v_i$  ولأن  $\frac{\partial F_i}{\partial v_i} = 0$  (انظر الواجب المنزلي لقوة لورنتز). وعليه يكون

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3v \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v f = 0$$

أما حد التصادم في معادلة لورنتز يختصر إلى  $Q^p$  (انظر المعادلة 4.3) وبإيجاز فإن  $0^{\text{th}}$  moment لمعادلة بولتزمان تختصر إلى

$$\frac{\partial n(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = \frac{1}{m} Q^p. \quad (3.7)$$

هذه عادة تعرف بمعادلة الاستمرارية continuity equation للكثافة العددية للجسيمات كما تظهر في الطرف الأيمن من المعادلة. بضرب المعادلة (7.3) في كتلة الجسيم ينتج لنا معادلة الاستمرارية لكثافة الكتلة

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = Q^p \quad (3.8)$$

المعادلة تصف إنتاج أو تلاشي الكتلة في لحظة التفاعل الكيميائي أو عملية التأين أو عملية إعادة الاتحاد. لقد لوحظ إن المعادلة (8.3) تختص بنوع محدد فقط من الجسيمات. وفي حالة عدة مركبات متعادلة أو في حالة نوع من الأيونات فإنه يتم تعيين معادلة الاستمرارية المطابقة لكل نوع. ويجب أن يكون إجمالي معدل الإنتاج للكتلة يساوي صفر.

وبنفس طريقة  $0^{\text{th}}$  moment فإن طريقة  $1^{\text{th}}$  moment لمعادلة بولتزمان هي

$$\left[ \frac{3}{2} m \int_{-\infty}^{\infty} d^3v v^2 (Boltzmann equation) \right] \quad \text{2nd moment} \quad \text{و} \quad \left[ m \int_{-\infty}^{\infty} d^3v v (Boltzmann equation) \right]$$

وبهذا نحصل على معادلات كمية حركة المائع (أو السرعة) والطاقة.



$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla \cdot \underline{\Pi} + qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \mathbf{u} Q^p + Q^p \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma-1} p + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho u^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\gamma-1} p \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \underline{\Pi} + \mathbf{L} \right) + qn \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} u^2 Q^p + \mathbf{u} \cdot Q^p + Q^E \quad (3.10)$$

علما بان الفيض الحراري  $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} m \int_{-\infty}^{\infty} d^3v (\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  حيث  $\gamma$  النسبة بين السعات الحرارية النوعية أي أن  $\gamma=5/3$  إذا كان الغاز يمتلك 3 درجات من عشوائية الحركة.

بحذف  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 \right)$  من معادلة الطاقة بالاستعانة بالمعادلة (8.3) و المعادلة (9.3) نحصل على

$$\frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{\partial}{\partial t} p + \nabla \cdot p \mathbf{u} \right) = -(\underline{\Pi} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{L} + Q^E \quad (3.11)$$

### ملاحظات

- مما سبق نجد أن قوة لورنتز للمائع  $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$  تحتاج إلى حل معادلات المجال المقابلة لها (15.1) – (18.1).
- قوة لورنتز (أو أي سرعة) تعتمد على سرعة المجموعة والسرعة هي متغير تابع في معادلات المائع في حين إنها متغير مستقل في معادلة بولتزمان.
- مصدر المعادلة للكتلة  $Q^p$ ، وكمية الحركة  $Q^p$ ، والطاقة  $Q^E$  يعتمد على خصائص النظام ويحتاج لان يكون محدد من خلال هذه الكميات أو من خلال مؤثر التصادم المتماثل وتكاملات السرعة المقابلة لها. حدود المعادلة تعكس الكتلة الناتجة والمتلاشية  $Q^p$ ، وتبادل كمية الحركة من خلال الاحتكاك  $Q^p$ ، وتبادل الطاقة بالتصادمات  $Q^E$ . الحد الخاص بالاحتكاك  $Q_s^p$  لمجموعة s يمكن أن نصفه بتردد التصادمات  $Q_s^p = \sum_t \nu_{st} m_s n(\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_s)$ .
- تنسور الضغط غالباً يفصل إلى ضغط قياسي وتنسور اللزوجة  $\underline{\Pi} = p \underline{1} + \underline{\mathbf{w}}$  حيث  $p = \frac{1}{3} Tr(\underline{\Pi})$  و  $\underline{\mathbf{w}}$  تنسور اللزوجة.



• غالباً نستخدم كينماتيكا اللزوجة  $\sigma_{ik} = a \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ik}$  على الطرف الأيمن في

$$\nabla \cdot \underline{\sigma} = \eta \Delta \underline{u} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \underline{u})$$
 معادلة كمية الحركة لنحصل على المعادلة

افترض إن الكتلة لحجم محدد تعطى بالعلاقة

$$M_V = \int_V \rho d^3x$$

التغير في الكتلة في هذا الحجم يكون

$$\frac{dM_V}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = - \int_V \nabla \cdot \underline{v} \rho d^3x = - \oint_{S_V} \rho \underline{v} \cdot d\mathbf{s}$$

حيث  $S_V$  تمثل سطح  $V$ . وبمعنى آخر الكتلة في الحجم  $V$  تتغير فقط إذا كان هناك كثافة فيض لا تساوي صفر عبر السطح. وبالمثل تكون كمية الحركة والطاقة محفوظة. ولكن، بالنسبة للطاقة فإنه يجب أن تشمل كمية الحركة والطاقة الواردة في المجالات.

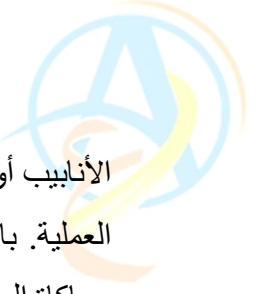
تمرين: اوجد التكامل 1<sup>st</sup> order moment لأول حدين في معادلة بولتزمان.

تمرين: اشتق 1<sup>st</sup> order moment لحد القوة في قوة الجاذبية وقوة لورنتز (معتمدة على السرعة).

تمرين: اعمل المثل مع معادلة الطاقة (أي اضرب معادلة بولتزمان (23.1) في  $\frac{1}{2} m v^2$  ومن ثم اجري عملية التكامل).

### 3.1.3 التقريب النموذجي للمائع Typical Fluid Approximations

المعادلات من (8.3) إلى (10.3) تؤسس مجموعة نموذجية لمعادلات المائع والتي تستخدم لمحاكاة المائع والغازات مثل محاكاة المناخ، ومحاكاة الانسياب الهوائي على الطائرات والسيارات، ومحاكاة تدفق الماء في



الأنابيب أو على جوانب القوارب البحرية، وتستخدم أيضا في الكثير من الأبحاث العلمية الأخرى والتطبيقات العملية. باستخدام المعادلات (8.3) و (9.3) و (11.3) يمكن أن نشق معظم المعادلات الأكثر شيوعا في محاكاة المائع:

- لمخطط معروف للسرعة  $u$  وبدون مصادر  $Q^p=0$  يمكن ان نمذج معادلة الاستمرارية، وعلى سبيل المثال يمكن اشتقاق معادلة تطور كثافة الغاز أو تركيز الغبار أو تدفق غاز من بخاخة أو غير ذلك، في أي وسط مثل الهواء والماء وغيره:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

- في حالة  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  فان المعادلة تبسط لمعادلة تفاضلية جزئية تعرف باسم advection equation:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

- عندما يكون الاشتقاق الكلي على مسار السائل معرف على انه  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$  فان معادلة advection equation هي

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

- في حالة ديناميكا الموائع hydrodynamic (عند غياب القوى الكهربائية والمغناطيسية):
  - في حالة غياب  $Q^p$ ، وبدون وجود لزوجة  $\sigma=0$  (ضغط قياسي) وباستخدام عجلة الجاذبية الأرضية لحد القوة في المعادلة فإننا سنحصل على معادلة Euler.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p (+ \mathbf{g})$$

- في حالة وجود اللزوجة فان معادلة كمية الحركة تعرف على إنها معادلة Navier-Stokes:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \left( \zeta + \frac{2}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) (+ \rho \mathbf{g})$$



- بإهمال الضغط والقوى الخارجية وبتبسيط اللزوجة فإننا نحصل على معادلة Burger:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = 0$$

- الانتشار والتوصيل الحراري: يمكن الحصول على معادلة الانتشار من معادلة الاستمرارية وإعادة تعريف سرعة المجموعة في وجود مجموعات متنوعة من الجسيمات. وعلى كل حال فإن معادلة الانتشار ممكن أن نحصل عليها من خلال الحصول على معادلة التوصيل الحراري (أي انتشار درجة الحرارة). المعادلة (11.3) ممكن أن تكتب بعدة صور. بتعريف  $\frac{p}{\gamma-1} = \rho \varepsilon$  ينتج لنا معادلة للطاقة الداخلية  $\varepsilon$  للغاز. وقانون الغاز المثالي  $p = nkT$  هو القانون الأكثر استخداما لإعادة صياغة معادلة الطاقة في معادلة درجة الحرارة. بافتراض ضغط قياسي وكثافة ثابتة، والفيض الحراري المتولد عن زيادة درجة الحرارة  $L = -k \nabla T$  نحصل على

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mu \Delta T$$

- معادلة الاستقرار steady state equation تنتج من المعادلات أعلاه بافتراض أن  $\partial/\partial t = 0$ . وفي حالة توفر شرط الاستقرار فإن السرعة تحدد من الجهد الذي يكون قياسي إذا كان التدفق غير دوراني ( $\mathbf{u} = \nabla \Phi$ ) أو أن التدفق غير انضغاطي وهذا أحيانا يمكن نمذجته بجهد متجه ( $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{V}$ ).

تمرين: باستخدام معادلة الاستمرارية والافتراضات المذكورة قم باشتقاق معادلة Euler.

تمرين: اشتق معادلة التوصيل الحراري باستخدام الافتراضات المذكورة.

تمرين: اشتق معادلة التوصيل الحراري لسرعة  $u$  ليست صفر.

تمرين: اشتق معادلة الاستمرارية ومعادلة كمية الحركة لتدفق غير دوراني.

تمرين: افترض ضغط قياسي، و  $L=0$  و  $Q^E=0$  في معادلة الضغط (11.3). اعتبر إن المعادلة

$$g = p^a \rho^b \quad \text{حدد كلا من } a \text{ و } b \text{ بحيث تكون نتيجة المعادلة لـ } g \text{ محافظة أي أن } \partial g / \partial t + \nabla \cdot g \mathbf{u} = 0$$





تمرين: افترض ضغط قياسي، و  $L=0$  و  $Q^E=0$  في معادلة الضغط (11.3). اعتبر إن المعادلة  $h=p^a \rho^b$  حدد كلا من a و b بحيث تكون المعادلة  $h$  مشتقة كاملة، أي أن  $\partial h / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla h = 0$ . وعند  $\gamma=5/3$  فان هذا المعادلة تصبح مقياس للانثروبي لان الانثروبي محفوظ في حالة التغير الادياباتيكي.

### 2.3 معادلتين للبلازما المائعة Two Fluid Plasma Equations

في حالة غياب التأين والطاقة المتبادلة بواسطة التصادمات وبافتراض إن البلازما مكونة من ايونات والكروونات أي من نوعين من الجسيمات، في هذه الحالة نحصل على ما يعرف باسم معادلتين المائع two fluid equations. عندما  $\rho_s = m_s n_s$  نحصل على معادلة الاستمرارية ومعادلة كمية الحركة ومعادلة الطاقة للجسيمات s.

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}_s) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \rho_s \mathbf{u}_s}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s) - \nabla \cdot \underline{\Pi}_s + q_s n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) + \mathbf{Q}_s^p \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p_s}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma - 1} \nabla \cdot p_s \mathbf{u}_s - (\underline{\Pi}_s \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_s - \nabla \cdot \mathbf{L}_s + Q_s^E \quad (3.14)$$

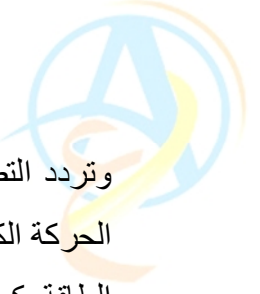
حيث  $Q_s^p$  تصف الاحتكاك بين مكونات البلازما (الايون والإلكترون) وتصف بصورة دقيقة المقاومة الكهربائية. وبكفاءة يمكن أن نعبر عن الاحتكاك على ان  $Q_s^p = v_{st} m_s n_s (v_t - v_s)$  حيث  $v_{st}$  هو تردد التصادمات بين الجسيمات للمجموعة s و المجموعة t.

بالتحديد لدينا للالكترونات

$$Q_e^p = \nu_{ei} m_e n_e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad (3.15)$$

وبهذا الشرط:

$$Q_e^p + Q_i^p = 0 \quad (3.16)$$



وتردد التصادم الكولومي  $\nu_{ei}$  الذي تم اشتقاقه في الجزء 4.1. الشرط (16.3) مطلوب للحفاظ على كمية الحركة الكلية. ولمركبتي البلازما (الايون والإلكترون) عندما تكون الايونات أحادية الشحنة فان الحفاظ على الطاقة يكون

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{Q}_i^p + \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{Q}_e^p + Q_i^E + Q_e^E = 0$$

أو

$$Q_i^E + Q_e^E = (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \cdot \mathbf{Q}_e^p$$

لاحظ انه في الكثير من التطبيقات عندما تكون الحالة شبه متعادلة أي أن  $n_e = n_i = n$  يعتبر تقريب هذا جيد. والمعادلات التي تصفها تعرف بمعادلتى المائع two fluid equations. وغالباً نفترض أيضاً إن الضغط قياسي أو gyrotropic، أي انه يكون موازي أو عمودي للمجال المغناطيسي. أما الحد الخاص بالتوصيل الحراري في المعادلة يهمل في الكثير من الحالات. وهناك استخدام آخر لهذه المعادلات (سوف نحصل عليه عندما نشق معادلات MHD في الأجزاء التالية وفي الشبتر الرابع) حيث سنحصل على خاصيتين من خواص المائع مثل الموجات وحالة عدم الاستقرار.



### 3.3 المائع المفرد أو معادلات MHD Single Fluid or MHD Equations

#### 1.3.3 اشتقاق معادلات MHD Derivation of the MHD Equations

وبالرغم من بساطة معادلتى المائع two fluid equation إلا إنها تحتوي على الكثير من التعقيدات التي لا نحتاجها في الكثير من أنظمة البلازما. وعليه فإنه من المفضل صياغة مجموعة من المعادلات مناسبة لتطبيقات اشمول وأوسع. هذه المجموعة من المعادلات تعرف باسم معادلات MHD. افترض الكترونات وايونات ذات شحنة واحدة بحيث  $q_i = -q_e = e$  وكثافة التيار الكلي لبلازما متعادلة الشحنة ( $n_e = n_i$ ) تكون على النحو التالي:

$$\mathbf{j} = en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$

كذلك نعرف كثافة الكتلة الكلية بـ  $\rho$  والكتلة الفعالة  $M$  وسرعة المجموعة أو فيض كثافة الكتلة الكلية  $\rho\mathbf{u}$  على النحو التالي

$$\begin{aligned}\rho &= n(m_i + m_e) \\ M &= m_i + m_e \\ \rho\mathbf{u} &= n(m_i\mathbf{u}_i + m_e\mathbf{u}_e)\end{aligned}$$

وبهذه التعريفات نحصل على

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{j} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\mathbf{u} &= 0\end{aligned}\quad (3.17)$$

تمرين: اشتق المعادلات أعلاه.

باستخدام التعريفات أعلاه يمكننا أن نعبر عن  $u_i$  و  $u_e$  بدلالة  $u$  و  $z$  والهدف من ذلك هو الحصول على معادلات لكمية الحركة (13.3) وكثافة الطاقة (14.4) بدلا من معادلة two-fluid.



$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \mathbf{u} + \frac{m_e}{m_i} \frac{\mathbf{j}}{ne} \simeq \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_e &= \mathbf{u} - \frac{\mathbf{j}}{ne} \end{aligned}$$

كذلك افترضنا فيما سبق إن الضغط قياسي لكل من الإلكترون والايون وهذا الافتراض ليس ضرورياً . بأخذ المجموع لمعادلات كمية الحركة والتعويض عن  $\mathbf{u}_i$  و  $\mathbf{u}_e$  نحصل على:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \frac{m_e m_i}{e^2} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \mathbf{j} \right) = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3.18)$$

حيث  $p = p_i + p_e$  . لاحظ إن كمية الحركة الكلية محفوظة بحيث  $Q_i^p + Q_e^p = 0$ .

تمرين: اشتق معادلات كمية الحركة.

المعادلة الثانية مطلوبة من اجل التمييز بين المركبات (يوجد هناك معادلتين لكمية الحركة لكل سائل). هذا يمكن أن نحصل عليه من ضرب معادلة الايون بـ  $q_i/m_i$  ومعادلة الإلكترون بـ  $q_e/m_e$  وجمع المعادلتين وتعديل ما يلزم:

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{m_e m_i}{e^2 \rho} \left[ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{u}) \right] - \frac{M}{e \rho} \nabla p_e + \frac{m_i}{e \rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{j} \quad (3.19)$$

والمقاومة النوعية  $h = m_e v_c / ne^2$  حيث  $v_c$  تردد التصادمات بين الالكترونات والايونات (أو الجسيمات المتعادلة). هذه المعادلة ما تعرف باسم تعميم قانون أوم generalized Ohm's law. في المعادلة أعلاه الحد الأول على الطرف الأيمن يعرف بحد القصور الذاتي لأنه يمثل عزم القصور الذاتي للإلكترون في تلك المعادلة.



تمرين: اشتق قانون أوم من تقريب المائعين two fluid.

الحد الثاني هو قوة ضغط الإلكترون والحد الثالث هو حد هول Hall term .

لاحظ انه حتى الآن لا يوجد تقريب في الاشتقاق الذي قمنا به (ما عد تماثل الضغط الذي لا يمثل ضرورة) والشكل السابق لقانون أوم يكافئ تماماً معادلات المائع two-fluid.

وأخيراً سنأخذ حاصل جمع معادلات ضغط الإلكترون والايون ونحافظ على معادلة ضغط الإلكترون بدون تعديل لنحصل على

$$\frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{\partial}{\partial t} p + \nabla \cdot p \mathbf{u} \right) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{L} + \eta j^2 + \dots \quad (3.20)$$
$$\frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{\partial}{\partial t} p_e + \nabla \cdot p_e \mathbf{u}_e \right) = -p_e \nabla \cdot \mathbf{u}_e - \nabla \cdot \mathbf{L}_e + \eta j^2$$

لاحظ إن حد التسخين الاومي موجوداً في كلا من مجموع معادلات الضغط وكذلك معادلة الإلكترون. أما في حالة معادلات MHC سوف نهمل الحدود المرتبطة بضغط الإلكترون، والحد الأول والثاني والثالث في الطرف الأيمن من قانون أوم العام. لنحصل على المعادلات التي تعرف بمعادلات resistive MHD:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{\partial}{\partial t} p + \nabla \cdot p \mathbf{u} \right) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \eta j^2 \quad (3.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (3.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.26)$$

المعادلات أعلاه لا تحدد  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . هذه المعادلة تدخل كشرط ابتدائي. إذا كانت  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  تتحقق في البداية فان معادلة الحث  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  متحقق في كل وقت.



تمرين: استخدم قانون أمبير ومعادلة الحث  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  لإثبات إن معادلة كمية الحركة يمكن أن تكتب على النحو التالي:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{1} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{B} \right]$$

في المعادلة أعلاه الحد  $B^2/(2\mu_0)$  يشير إلى الضغط المغناطيسي. هذا المصطلح يعطي معنى عندما نتحدث عن حالات الاتزان المغناطيسي البسيط.

### 2.3.3 التقريبات المستخدمة في معادلات MHD

(a) بداية نؤكد على إن معادلات MHD تشتق من معادلات two fluid وعليه فإنها تخضع لنفس القيود العامة لمعادلات المائع، أي إنها لا يمكن أن تدرس تأثير جسيم مفرد أو متقطع، مثل حركة الجيرو gyro motion. لاحظ على أي حال انه ليس بالضرورة أن نحصل جسيمين مشحونين لنشتق معادلات MHD.

(b) من حيث المجموعة الكاملة لمعادلات two fluid افترضنا تعادل الشحنة أي إن الشحنات الموجبة تعادل الشحنات السالبة.

$$n_e = n_i$$

(c) في معادلات ماكسويل فان تيار الانزياح displacement current والذي يتناسب مع معدل التغير في المجال الكهربائي مهمل على أساس افتراض عدم وجود أمواج كهرومغناطيسية تنتشر بسرعة الضوء. الانحراف في B متحقق من خلال الشروط الابتدائية (اثبت ذلك؟) وكذلك شبه التعادل يحقق معادلة كولوم.

(d) في معادلة كمية الحركة افترضنا إن الضغط متماثل في جميع الاتجاهات. بصفة عامة الضغط هو تنسور، على كل حال في بيئية تصادمية خاصة، التصادم يحافظ على دالة التوزيع أن تكون قريبة من الاتزان الحراري المحلي. في حالة غياب التصادمات يكون الضغط غير متماثل وذلك يسبب عدم استقرار حركي وانهييار في الضغط.



في شباتر لاحقة سوف نناقش العمليات المقابلة لهذه الحالة والتأثير الناتج عن الضغط الـ gyrotropic. أي تنسور الضغط بكميات ضغط مختلفة موازية وعمودية للمجال المغناطيسي. مركبات الضغط الغير متماثل تكون موجودة في بعض الأحيان في كيناماتك الزوجة (أو gyroviscosity أي النسبة بين قوة اللزوجة وقوة القصور الذاتي). معادلة كمية الحركة أيضا لا تحتوي على الحد  $\frac{m_e m_i}{e^2} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \mathbf{j} \right)$  حيث إن هذا الحد صغير لأسباب عديدة منها ما هو متعلق بالنطاق scaling والذي سوف ندرسه بتوسع مع قانون أوم. إضافة إلى ذلك مقدار التيار الكهربائي يكون عادة اصغر من مقدار تدفق المجموعة في الحد  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$ .

(e) شكل قانون أوم الموضح في المعادلة (23.3) يعرف باسم قانون أوم المقاوم وينتج عنه معادلة MHD تعرف باسم MHD المقاومة resistive MHD. إذا كانت  $\eta=0$  نستخدم ما يعرف باسم MHD المثالي. الافتراضات الأساسية في قانون أوم ممكن أن تفهم من خلال اختبار قانون أوم العام (19.3) بواسطة تحليل الأبعاد أو التسوية normalization.

قياس كل الكميات بالوحدات القياسية، أي الحث المغناطيسي B بوحدات المجال المغناطيسي  $B_0$  ذلك إن  $B = B_0 \hat{B}$  حيث  $\hat{B}$  قيمة قريبة من الواحد، بهذا نتمكن من اختبار العوامل المختلفة في قانون أوم. لاحظ إن السرعات يجب أن تقاس بوحدة Alfven speed  $u_0 = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$  والزمن بوحدة Alfven travel time  $t_0 = L_0 / u_0$ ، والطول بالتدرج القياسي للتدرج في النظام  $L_0$ . بتطبيق هذا القياس نحصل على

$$\hat{E} + \hat{u} \times \hat{B} = \frac{c^2}{\omega_{pe}^2 L_0^2} \frac{1}{\hat{\rho}} \left[ \frac{\partial \hat{j}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{u} \hat{j} + \hat{j} \hat{u}) \right] - \frac{c}{\omega_{pi} L_0} \frac{1}{\hat{\rho}} \nabla \hat{p}_e + \frac{c}{\omega_{pi} L_0} \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{j} \times \hat{B} + \eta \hat{j}$$

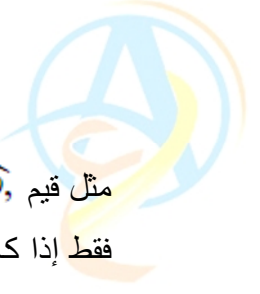
الحدود

$$c/\omega_{pe} = (\epsilon_0 m_e c^2 / n e^2)^{1/2}$$

و

$$c/\omega_{pi} = (m_i / m_e)^{1/2} c/\omega_{pe} \gg c/\omega_{pe}$$

تعرف باسم نطاق عزم القصور للإلكترون والايون (أو عمق عشاء الالكتروني والأأيوني بسبب طول التلاشي extinction length للأمواج في الوسط). لاحظ إن كل كميات MHD تقاس بالوحدات القياسية



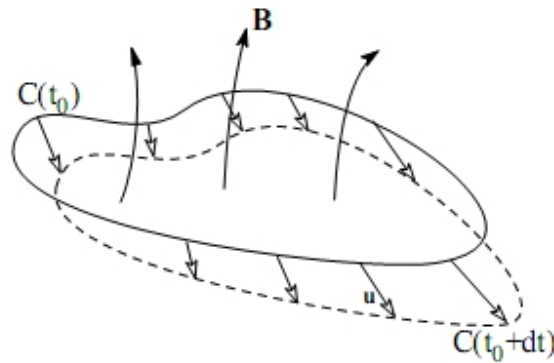
مثل قيم  $\hat{B}$ ,  $\hat{\rho}$  إلى أخره. وعليه فان حد القصور الذاتي (الحد الأول على الجانب الأيمن من المعادلة) مهم فقط إذا كان طول نطاق النظام  $L$  يقارن نطاق عزم القصور الذاتي للإلكترون أو مساوياً له. وبالمثل، حد ضغط الإلكترون وحد هول (الحد الثاني والثالث في الجانب الأيمن من المعادلة) مهم فقط إذا كان تدرج النطاق يقارن بنطاق عزم القصور الذاتي للإيون  $c/\omega_{pi}$  أو مساوياً له. ولهذا يمكن أن نهمل هذه الحدود إذا كان التدرج في النظام اكبر كثيراً من نطاق العزم.

### ملاحظات أخرى على قانون أوم

- الحد  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  عادة نشير له على انه حد هول Hall term. بحيث  $\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{m_i}{e\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}$  فان قانون أوم يمكن كتابته على النحو التالي:

$$\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} = \frac{m_e m_i}{e^2 \rho} \left[ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{u}) \right] - \frac{M}{e\rho} \nabla p_e + \eta \mathbf{j}$$

- إذا كان حد عزم القصور الذاتي للإلكترون  $(c/\omega_{pe})$  مهمل فان مجموعة المعادلات المقابلة لهذه الحالة يشار لها بـ Hall MHD.
- إذا كان كلا من حد العزم للإلكترون والايون مهمل فان قانون أوم يسمى بقانون أوم المقاوم resistive Ohm's law  $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \mathbf{h} \mathbf{j}$  ومعادلات MHD يشار لها بـ MHD المقاومة.



الشكل 1.3 يوضح شرط التجمد





- إذا كانت المقاومة النوعية تساوي صفر  $\eta=0$  فإن قانون أوم و MHD يصبح معروفًا باسم قانون أوم المثالي و MHD المثالية.

تمرين: افترض إن كثافة البلازما  $1\text{cm}^{-3}$ ، ودرجة الحرارة مكافئة لـ  $1\text{keV}$ ، والمجال المغناطيسي  $20\text{nT}$  وهي قيمة مثالية لقيمة المجال المغناطيسي لطبقة magnetotail للأرض. اوجد نطاق العزم للإلكترون والايون. افترض إن حالة شبه التعادل غير متحققة في كرة نصفه قطرها يعادل طول العزم الذاتي للإلكترون بمقدر 1% (على سبيل المثال 1% من شحنة الايون لا تتعادل مع شحنة الالكترونات). إذا كان الوسط الخارجي هو الفراغ ما هو المجال الكهربائي خارج الكرة؟ ما هي السرعة العمودية على المجال المغناطيسي المطلوب لقانون أوم ليولد مجال كهربائي مقداره يعادل المجال على سطح الكرة؟

تمرين: في البلازما في التمرين السابق، عين درجة الحرارة بالكلفن. عين أيضا كثافة الطاقة بوحدة  $\text{kW}$   $\text{hours}/\text{m}^3$  وبوحدة  $\text{kW hours}/R_e^3$  علما بان  $1 R_e = 6370\text{km}$ . ولأجل تبسيط الحل افترض إن سطح البلازما ممثل في اسطوانة نصف قطرها  $10R_e$  و طولها  $100 R_e$ . كم المدة الزمنية التي سوف تعمل بها محطة طاقة بطاقة إنتاجية  $1000\text{MW}$  من خلال الطاقة المخزنة في البلازما؟

### 4.3 خواص معادلات MHD

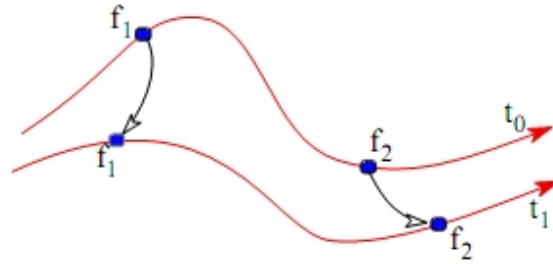
#### 1.4.3 شرط التجمد Frozen-in Condition

معادلات MHD تستخدم في الأغلب تقريبا البلازما plasma approximation. فهي تحقق قانون الحفاظ على الكتلة وكمية الحركة والطاقة. وكما ذكر سابقا فإنها متحققة على نطاقات اكبر من نطاق عزم الايون. ومن المهم أن تعرف إن معادلة MHD المثالية لا تمتلك نطاق طول فيزيائي. هذا يمكن توضيحه من خلال التماثل الذاتي، بمعنى إن الحركة على نطاقات طول صغيرة تساوي تماما الأنظمة بنطاقات طول كبيرة وباختلاف واحد فقط وهو إن الأنظمة على نطاق كبير تتحرك ببطء. وهذا يمكن توضيحه بواسطة التسوية normalization للمعادلات لطول خاص  $L_0$  والذي يعني أن نطاق الزمن هو  $\tau_0=L_0/u_A$  (حيث  $u_A = B_0/\sqrt{\mu_0\rho_0}$ ). ولنظام متماثل فيما عدا إنها 10 مرات أطول من  $L_0$  أي  $10L_0$  ونطاق الزمن  $10\tau_0$ . ولهذا فإن إعادة التسوية re-normalization ينتج بالضبط نفس الـ dynamics.



تفترض MHD المثالية إن البلازما موصل مثالي (المقاومية لها تساوي صفر  $h=0$ ). والحدود على نطاق العزوم الالكترونية والأيونية يمكن إهمالها. وهذا يؤدي إلى أن يصبح قانون أوم على النحو التالي:

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$$



الشكل 2.3 يوضح خط المحافظة

والذي يعني تجمد الفيض المغناطيسي في حركة البلازما. وهذا ممكن مشاهدته من خلال المناقشة التالية. الفيض المغناطيسي خلال السطح  $C$  هو التكامل السطحي الموضح في المعادلة التالية:

$$\Phi_C = \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

حيث  $d_{sC}$  هي عصر المساحة للكتنور  $C$ . وعنصر الكنتور يتحرك بسرعة المائع  $\mathbf{u}$ . والتغير في الفيض المغناطيسي من  $t_0$  إلى  $t_0+dt$  يكون على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \Phi_C(t_0 + dt) - \Phi_C(t_0) &= \int_{C(t_0)}^{C(t_0+dt)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + dt \int_{C(t_0)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \\ &= dt \oint_{\partial C(t_0)} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u}_C \times d\mathbf{l}) - dt \int_{C(t_0)} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \\ &= dt \oint_{\partial C(t_0)} (\mathbf{B} \times \mathbf{u}_C) \cdot d\mathbf{l} - dt \oint_{\partial C(t_0)} (-\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= dt \oint_{\partial C(t_0)} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_C) \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

حيث الحد الأول على الجانب الأيمن من المعادلة يمثل مقدار المشاركة من التغير في الشكل لـ  $C$  والحد الثاني يمثل مقدار المشاركة من التغير في  $\mathbf{B}$ . وهذا يؤدي إلى أن



$$\frac{d\Phi_C}{dt} = 0$$

إذا تحرك السطح بسرعة المائع بحيث  $u_C = u$ . وبتعبير آخر، مقدار الفيض المغناطيسي خلال أي مساحة مقطع لمائع MHD لا يتغير مع الزمن إذا كانت المساحة تتحرك بسرعة المائع. ويمكن أن نفهم شرط التجمد بالطريقة التالية. عنصرين مائع متصلين معا باستمرار عند زمن محدد بخطوط المجال. (يعرف الخط باتجاه المجال المغناطيسي عند أي لحظة من الزمن). وبتعبير آخر خط المجال يعرف من خلال عناصر بلازما المائع، أي أن المقاومة الكهربائية تساوي صفر.

وفي حالة أن يكون التدرج صغيرا في البلازما فان قانون أوم بشكله الكامل يجب أن يستخدم. لان نطاق عزم الايون يكون بمعامل  $\sqrt{m_i/m_e}$  اكبر من تأثير عزم الإلكترون فان الحد الأول الذي يجب أن نعتبره هو حد هول Hall term وحد ضغط الإلكترون (لاحظ إن ضغط الإلكترون يكون اقل بـ 10 مرات من ضغط الايون لذا فان مساهمة هذا الحد صغيرة. ومن الضروري أن تلاحظ إن

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u} - \frac{m_i}{e\rho} \mathbf{j} \quad (3.27)$$

بمقارنة هذا مع قانون أوم العام يمكن أن نعيد كتابتها وإهمال نطاق عزم الإلكترون وذلك على النحو التالي:

$$\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} = -\frac{M}{e\rho} \nabla p_e \quad (3.28)$$

بمعنى آخر فان إضافة حد هول Hall term يعمل على تحويل قانون أوم من الصورة  $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$  في

MHD إلى الصورة  $\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} = 0$ .

هناك العديد من التطبيقات تستخدم معادلات المائع ومعادلات الحركة. ومن هذه التطبيقات الموجات، و الانقطاعات والموجات الصادمة shocks، وعدم الاستقرار، والموائع المستقرة Study state والموائع المتزنة equilibrium solutions. ومن المهم خاصة في الجزء الأخير من هذا الموضوع التعرف على هذه المصطلحات العلمية.



**Steady state** أي حالة الاستقرار والتي تفترض الاستقرار الزمني في المائع مع إن السرعة لا تساوي صفر ولكن  $\partial/\partial t=0$  و  $u \neq 0$ .

**Equilibrium solutions** المائع المتزن يفترض  $\partial/\partial t=0$  و  $u=0$ . لاحظ انه أيضا إن السرعة في فضاء الطور دائما لا تساوي صفر للأنظمة الفيزيائية. وكذلك سرعة الإلكترون لا تساوي صفر في منطقة التيار.

**Electrostatic solutions** المائع الكهروستاتيكي تفترض ان  $\partial B/\partial t=0$  و هذا يعني ان  $\nabla \times E=0$  أو أن  $E=-\nabla f$ . وفي هذه الحالة فان قانون أوم يجب أن يستبدل بمعادلة كولوم.

### 2.4.3 الانتروبي والتوصيل الحراري الادياباتيكي

يكون التغير في الحرارة في الغاز العادي أو المائع ناتج عن الضغط أو التغير في درجات الحرارة ويعطى بالمعادلة التالية:

$$\Delta Q = C_V dT + p dV$$

لنفترض الغاز المثالي له 3 درجات من الحرية في الحركة

$$T = pV/R$$

والسعة الحرارية والسعة الحرارية النوعية هي

$$C_V = \frac{3}{2}R \quad C_p = \frac{5}{2}R$$
$$c_V = \frac{3}{2} \quad c_p = \frac{5}{2}$$

والنسبة هي  $\gamma = c_p/c_V = 5/3$ ، وعليه فان التغير في الحرارة يصبح



$$\begin{aligned}\Delta Q &= c_v V dp + c_p p dV \\ &= c_v p V \left( \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} \right)\end{aligned}$$

التغير في الانتروبي يعرف على انه  $dS = \Delta Q/T$  أو

$$S \propto C_V \ln (pV^\gamma)$$

وللتغيرات الاديباتيكية في حالة النظام فان التغير في الانتروبي يساوي صفر أي  $dS=0$  وهذا يمكن التعبير عنه أيضا على النحو التالي:

$$\frac{d(p\rho^{-\gamma})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} p\rho^{-\gamma} + \mathbf{u} \cdot \nabla (p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad (3.29)$$

إذا كان الحجم النوعي  $V \propto 1/\rho$ . هذه المعادلة تعني إن الانتروبي لعنصر للبلازما لا يتغير (لا يتحرك مع هذا العنصر). ونفس العلاقة ممكن أن نشتقها من معادلة الضغط الكلي بمساعدة معادلة الاستمرارية للضغط.

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left( \frac{\partial}{\partial t} p + \nabla \cdot p\mathbf{u} \right) = -p\nabla \cdot \mathbf{u}$$

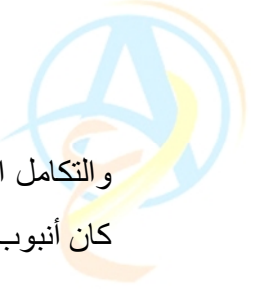
بمساعدة معادلة الاستمرارية للضغط.

تمرين: اشتق المعادلة (29.3) من معادلة الضغط.

### خواص أنابيب الفيض المغناطيسي **Properties of magnetic flux tube**

حجم أنبوب فيض مغناطيسي مغلق (أي المجنيتوسفير أو المرايا المغناطيسية) تعطى بالمعادلة التالية:

$$V_f = \int_{l_1}^{L_2} \left( \int \int_{A_c(l)} ds \right) dl$$



والتكامل اخذ على الطول بأكمله لأنبوب الفيض والذي تتغير مساحة مقطعه على طول أنبوب الفيض. وإذا كان أنبوب الفيض رقيق جدا فان مساحة مقطعه تتغير كما يلي

$$A_c \propto \frac{1}{B}$$

هذا يقودنا إلى تعريف حجم فيض الأنبوب التفاضلي differential flux tube volume

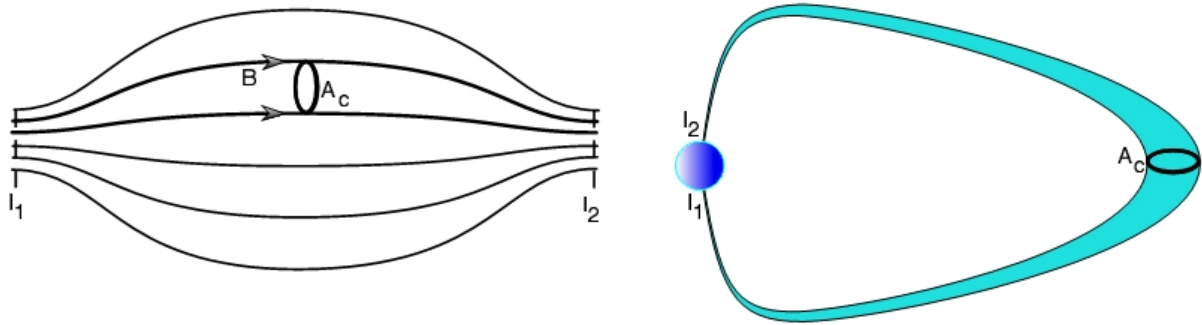
$$V = \int_{l_1}^{l_2} \frac{dl}{B}$$

بفحص خواص هذا أنبوب الفيض المغناطيسي:

يكون العدد الكلي للجسيمات في أنبوب الفيض هو

$$N_f = \int_{l_1}^{l_2} \left( \int \int_{A_c(l)} n ds \right) dl$$

والذي يعني تكامل كثافة البلازما على حجم أنبوب الفيض.



التغير في عدد الجسيمات الكلي في الفترة الزمنية من t إلى t+Δt يعطى بالتغير في طول أنبوب الفيض، والتغيرات في حدود مساحة المقطع، والتغير في الكثافة العددية المحلية.



$$\begin{aligned}
\Delta N &= \int_{l_{1,t+\Delta t}}^{l_{2,t+\Delta t}} \left( \int \int_{A_{c,t}} n ds \right) \cdot dl - \int_{l_{1,t}}^{l_{2,t}} \left( \int \int_{A_{c,t}} n ds \right) \cdot dl \\
&+ \int_{l_{1,t}}^{l_{2,t}} \left( \int \int_{A_{c,t+\Delta t}} n ds - \left( \int \int_{A_{c,t}} n ds \right) \right) \cdot dl \\
&+ \int_{l_1}^{l_2} \left( \int \int_{A_c(l)} (n(t+\Delta t) - n(t)) ds \right) \cdot dl \\
&= \int_{l_{2,t}}^{l_{2,t+\Delta t}} \left( \int \int_{A_{c,t}} n ds \right) \cdot dl - \int_{l_{1,t}}^{l_{1,t+\Delta t}} \left( \int \int_{A_{c,t}} n ds \right) \cdot dl \\
&+ \int_{l_{1,t}}^{l_{2,t}} \left( \oint_{A_{c,t+\Delta t}} n \mathbf{u}_f \Delta t \times d\mathbf{c} \right) \cdot dl + \int_{l_1}^{l_2} \left( \int \int_{A_c(l)} (n(t+\Delta t) - n(t)) ds \right) \cdot dl
\end{aligned}$$

حيث  $A_c$  هي مساحة المقطع للفيضان، و  $u_f$  سرعة حدود أنبوب الفيضان، و  $d_c$  عنصر الخط على امتداد حدود أنبوبة الفيضان. التغير الزمني في العدد الكلي للجسيمات في أنبوب الفيضان هو

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta N}{\Delta t} &= \mathbf{u}_{f2} \cdot \int \int_{A_{c2}} n ds + \mathbf{u}_{f1} \cdot \int \int_{A_{c1}} n ds \\
&+ \int_{l_{1,t}}^{l_{2,t}} \oint_{A_{c,t}} n \mathbf{u}_f \cdot ds + \int_{l_1}^{l_2} \left( \int \int_{A_{c,t}} \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t} ds \right) \cdot dl
\end{aligned}$$

حيث  $u_{f1}$  و  $u_{f2}$  عبارة عن السرعة لحدود أنبوب الفيضان عند النقطتين  $l_1$  و  $l_2$ . و في عندما يؤول  $\Delta t$  إلى الصفر  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= \mathbf{u}_{f2} \cdot \int \int_{A_{c2,t}} n ds + \mathbf{u}_{f1} \cdot \int \int_{A_{c1,t}} n ds \\
&+ \int_{l_{1,t}}^{l_{2,t}} \oint_{A_{c,t}} n \mathbf{u}_f \cdot ds - \int_{l_1}^{l_2} \int \int_{A_{c,t}} \nabla \cdot (n \mathbf{u}) d^3 r \\
&= \int \int_{surface(V_f)} (n(\mathbf{u}_f - \mathbf{u})) \cdot ds
\end{aligned}$$

بمعنى آخر التغير في عدد الجسيمات يكون نتيجة لحركة حدود أنبوب الفيضان بالنسبة لحركة البلازما. وبالأخص فإن هذا يعني إن



- التدفق خلال نهايات أنبوب الفيض (في الايونسفير أو خارج حدود منطقة مرايا المجال المغناطيسي) يغير عدد الجسيمات الكلي في أنبوب الفيض.
- عدد الجسيمات لا يتغير للنهايات المغلقة (أي إن لا يوجد تدفق خلال النهايات) وكذلك لـ MHD المثالية لأن حدود أنبوب الفيض هي خطوط مجال مغناطيسي وعناصر البلازما تتحرك مع المجال المغناطيسي (=حدود أنبوب الفيض).
- باستخدام تعريف أنبوب الفيض التفاضلي

$$N = \int_{l_1}^{L_2} \frac{ndl}{B}$$

يكون محافظ في MHD المثالية عند غياب التدفق على طرفي أنبوب الفيض

المناقشة السابقة تعتبر العدد الكلي للجسيمات هو التكامل بالنسبة للكثافة العددية. لاشتقاق استقرار وانتظام العدد الكلي للجسيمات في أنابيب الفيض فإننا نحتاج فقط إلى أن تكون الكثافة العددية تحقق معادلة الاستمرارية. وهذا يعني إن أي خاصية تحقق معادلة الاستمرارية تكون محافظة. وبالأخص يمكن أن نبين إن

$$\frac{\partial p^{1/\gamma}}{\partial t} + \nabla \cdot p^{1/\gamma} = 0$$

إذا كان الفيض الحراري ومصادر الطاقة مهملة. ولتغير بطيء (اديباتيكي) للضغط يكون ثابت على خطوط المجال المغناطيسي وعليه نعرف

$$H = p^{1/\gamma} V = \int_{l_1}^{L_2} \frac{p^{1/\gamma} dl}{B}$$

ولأن  $p^{1/\gamma}$  تحقق معادلة الاستمرارية للمشتقة  $dH/dt=0$  فإن  $dH/dt=0$  لـ MHD المثالية ولا يوجد فيض خلال نهايات أنبوب الفيض. اعتبر الانتروبي النوعي لأنبوب الفيض هو  $S=H'$ . هذا يعني إن الانتروبي النوعي يحقق المعادلة

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dpV^\gamma}{dt} = 0$$





هذا هو التعميم للحفاظ على الانتروبي

$$\frac{dpp^{-\gamma}}{dt} = 0$$

عدد الجسيمات على أنبوب الفيض والانتروبي لأنبوب الفيض مهم للحصول على مفهوم التوصيل الحراري. اعتبر على سبيل المثال مجنيتوسفير فان هذه الكميات يمكن أن تقدر في مستوى استوائي وهذا يوفر لنا خريطة ثنائية الأبعاد لانتروبي أنبوب الفيض. استقرار التوصيل الحراري يعني  $\partial/\partial t = 0$ ، أي أن المجال المغناطيسي ومواصفات البلازما لا تتغير. وهذا الاستقرار في التوصيل الحراري يحدث فقط على خطوط كونتور الانتروبي الثابت لأنبوب الفيض.

### معادلات أخرى للحالة Other equations of state:

الاشتقاق الشاق لمعادلات MHD من بولتزمان يعني إن  $\gamma=5/3$ . على أي حال هناك حالات يكون من الأنسب أن نفترض قيم أخرى لـ  $\gamma$  لمحاكاة معادلة حالة خاصة. وهنا نشرح هذه باستخدام معادلة الضغط.

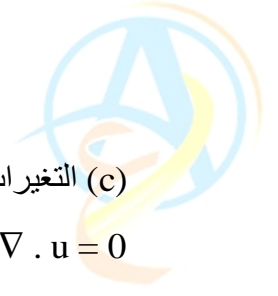
$$\frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{\partial}{\partial t} p + \nabla \cdot p \mathbf{u} \right) = -p \nabla \cdot \mathbf{u}$$

(a) التغيرات الأديباتيكية (تغير عند ثبوت كمية الحرارة): قيمة  $\gamma=5/3$  تتطابق التغير الأديباتيكي ويمكن أن نحول معادلة الضغط إلى معادلة للتغيرات الأديباتيكية.

(b) التغيرات الأيزوثيرمال (تغير عند ثبوت درجة الحرارة): باستخدام  $p=nk_b T$  يمكن إعادة كتابة معادلة الضغط على النحو التالي:

$$\partial T / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla T = -(\gamma - 1) T \nabla \cdot \mathbf{u}$$

حيث قيمة  $\gamma=1$  تفودنا إلى  $dT/dt = \partial T / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla T = 0$  وهذا يعني تغيرات تحت درجة حرارة ثابتة isothermal.



(c) التغيرات الغير قابلة للانضغاط يمكن أن تتمذج عند تؤول الجاما إلى الملا نهاية  $\gamma=\infty$  لان هذه تعني إن  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  و عليه  $dp/dt=0$ .

### 3.4.4 المحافظة على القوانين :Conservation laws

معادلة MHD تحقق قوانين الحفظ على الكتلة وكمية الحركة والطاقة.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot \rho \mathbf{u} \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \underline{\underline{1}} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{B} \right] \\ \frac{\partial w_{tot}}{\partial t} &= -\nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}}{\mu_0} \mathbf{B} + \frac{\eta}{\mu_0} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right]\end{aligned}$$

حيث إن كثافة الطاقة الكلية هي

$$w_{tot} = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

تمرين: وضح تحقق معادلة الحفظ على الطاقة.

الحدود المختلفة في المعادلة (30.3) هي كثافة الطاقة للتدفق الحجمي:  $\frac{1}{2} \rho u^2$

### 5.3 توازن الـ MHD Equilibria

#### الانتشار المقاوم Resistive Diffusion

قبل أن نناقش خواص الاتزان دعنا أولاً ندرس المقاومة النوعية الكهربائية. باستخدام المقاومة النوعية في قانون أوم (عند مقاومة نوعية ثابتة  $h$ ) ومن معادلة الحث



$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} \\ &= \nabla \times \left[ \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \right] \\ &= \nabla \times [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] + \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B}\end{aligned}$$

في حالة إهمال السرعة نحصل على

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B}$$

هذا المعادلة تشير إلى أن المجال المغناطيسي يتطور في وجود مقاومة نوعية محدودة حتى في حالة غياب تدفق البلازما. هذه العملية تعرف باسم التدفق المقاوم resistive diffusion. من تحليل الأبعاد نحصل على مقياس زمني نموذجي هو

$$\tau_{diff} \sim \frac{\mu_0 L^2}{\eta}$$

أي أن التدفق يكون سريع عند قيم  $h$  كبيرة أو في حالة أطوال قصيرة. وبالعودة إلى مناقشتنا السابقة حول شرط التجمد احتجنا أن تكون المقاومة النوعية تساوي 0 أو على الأقل صغيرة جداً حتى يكون زمن التدفق كبيراً بالمقارنة بمقياس الزمن للتحويل حيث يكون شرط التجمد متحققاً.

### المعادلات الأساسية للاتزان وخواصها Basic equilibrium equations and properties:

الاتزان يتطلب  $\partial/\partial t=0$  و  $u=0$ ، وبهذا فإن معادلات MHD تقودنا إلى

$$\begin{aligned}-\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{3.31}$$

بأخذ الضرب القياسي لمعادلة كمية الحركة بـ  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{j}$  ينتج ما يلي:



$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \nabla p &= 0 \\ \mathbf{j} \cdot \nabla p &= 0 \end{aligned}$$

بمعني آخر الضغط ثابت على خطوط المجال المغناطيسي وعلى خطوط التيار الكهربائي. لاحظ: لا يوجد معادلة لكثافة البلازما. فقط الضغط هو الذي يتطلب إيجادها. من المعادلة

$$p = nk_B T$$

ومن هذه المعادلة نجد أن حاصل ضرب  $nT$  يكون ثابتاً وأي من الكثافة ودرجة الحرارة ممكن أن نختار لها قيمة عشوائية.

معادلة كمية الحركة ممكن أن نعبر عنها بالمعادلة التالية:

$$\nabla \cdot \left[ \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \underline{\underline{1}} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}\mathbf{B} \right] = 0$$

أو

$$\nabla \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = 0$$

هذا يعني إن الاتزان البسيط الخاص بـ  $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = 0$  (حالة مبسطة من هذا الشرط عندما تكون خطوط المجال المغناطيسي خطوط مستقيمة). في هذه الحالة الاتزان يتطلب أن يكون الضغط الكلي متعادل بحيث يكون مجموع الضغط المغناطيسي والحراري يساوي صفر أي أن

$$\nabla \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0$$

أو

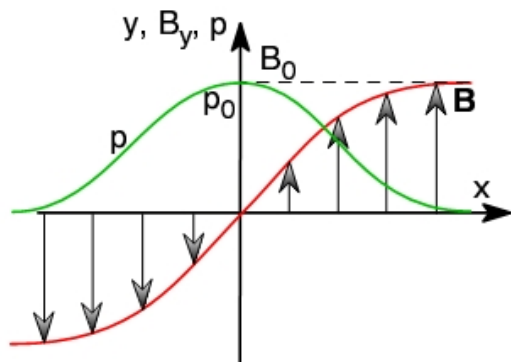
$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const} \quad (3.32)$$



مثال خاص على هذه الحالة من الاتزان هو شريحة مستوية يمر بها تيار والذي يعرف باسم Harris sheet حيث

$$\mathbf{B} = B_0 \tanh \frac{x}{L} \mathbf{e}_y$$

مع

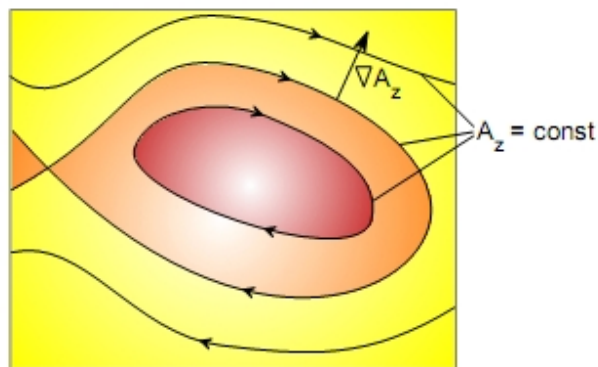


$$p = p_0 \cosh^{-2} \frac{x}{L}$$

$$\mathbf{j} = \frac{B_0}{\mu_0 L} \cosh^{-2} \frac{x}{L} \mathbf{e}_z$$

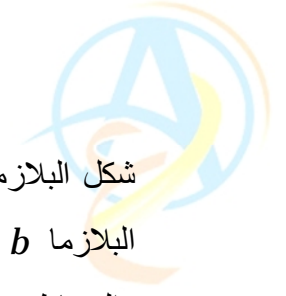
$$\rho = \rho_0 \cosh^{-2} \frac{x}{L}$$

ومع  $p_0 = B_0^2 / (2\mu_0)$



الشكل 3.3 يوضح خطوط المجال بواسطة متجه الجهد

لاحظ انه من الممكن أن نضيف أي ثابت إلى الضغط. وكذلك تعديل المجال المغناطيسي، ليكون على شكل غير متماثل. يحسب الضغط من المعادلة (32.3) وبشرط أن يكون أكبر من صفر في كل مكان.



شكل البلازما والمجال المغناطيسي يحددان أهمية الضغط بالنسبة للقوة المغناطيسية. ومن الشائع استخدام البلازما  $\beta$  كمقياس للضغط الحراري ولضغط المجال المغناطيسي (هذا أيضا مقياس لكثافة الطاقة الحرارية والمغناطيسية). البلازما  $\beta$  تعرف على إنها

$$\beta = \frac{2\mu_0 p}{B^2}.$$

### الاتزان ثنائي الأبعاد Two-Dimensional Equilibria

الأسلوب المنطقي لحل معادلات الاتزان تتطلب عادة أن نمثل المجال المغناطيسية من خلال متجه الجهد.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

اعتبر نظام ثنائي الأبعاد حيث  $\partial/\partial z=0$  مثل  $B=B(x,y)$ . في هذه الحالة المجال المغناطيسي يمثل من خلال المركبة  $z$  لمتجه الجهد  $A_z(x,y)$  ومركبة  $B_z(x,y)$

$$\mathbf{B} = \nabla \times (A_z \mathbf{e}_z) + B_z \mathbf{e}_z = \nabla A_z \times \mathbf{e}_z + B_z \mathbf{e}_z$$

نحن نحتاج إلى متغيرين مستقلين لان  $\nabla \cdot \mathbf{B}=0$ . لاحظ إن هذا الشكل للـ  $B$  دائما يحقق  $\nabla \cdot \mathbf{B}=0$ . وبتعيين المجال في مستوى  $x,y$  على النحو التالي:

$$\mathbf{B}_\perp = \nabla \times A_z(x,y) \mathbf{e}_z = \nabla A_z(x,y) \times \mathbf{e}_z$$

وهذا يؤدي إلى أن  $B_\perp$  عمودية على  $\nabla A_z$  و  $\mathbf{e}_z$ .

ولهذا فان خطوط كنتور  $A_z$  هي خطوط مجال مغناطيسي مُسقطه على المستوى  $x,y$ . فرق متجه الجهد بين خطوط المجال هو قياس مباشر للفيض المغناطيسي. متجه الجهد يعين من خلال تكامل

$$B_x = \partial A_z / \partial y \text{ and } B_y = -\partial A_z / \partial x.$$

في الإحداثيات الكروية يكون استخدام مركبات متجه الجهد متطابقة تمام ولكن بتعديل طفيف. اعتبر بعدين مع  $\partial/\partial \phi=0$ . في هذه الحالة المجال المغناطيسي يعبر عنه بـ



$$\mathbf{B}(r, \theta) = \nabla \times A_{\varphi}(r, \theta)\mathbf{e}_{\varphi} + B_{\varphi}(r, \theta)\mathbf{e}_{\varphi} \quad (3.34)$$

وبالتفصيل أكثر نجد أن مركبات المجال المغناطيسي هي

$$B_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_{\varphi})$$
$$B_{\theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_{\varphi})$$

تذكر إن التدرج gradient في مستوى  $r, \theta$  يعرف على النحو التالي:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_{\theta}$$

من الممكن أن نختار  $f = r \sin \theta A_{\varphi}$  بحيث أن  $\nabla f = 0$ . وهذا يؤدي إلى إن خطوط المجال المغناطيسي تحدد من العلاقة التالية

$$r \sin \theta A_{\varphi} = \text{const} \quad (3.35)$$

تمرين: اعتبر المجال المغناطيسي  $B_z = b_0 y / L$ ,  $B_y = \epsilon B_0$ . احسب معادلات خطوط المجال المغناطيسي.

تمرين: اعد الحسابات السابقة ولكن استخدم الإحداثيات الاسطوانية بحيث  $\partial/\partial \varphi = 0$ .

مع الاستفادة من العلاقة التالية

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

فان كثافة التيار الكهربائي تصبح على النحو التالي:



$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times [\nabla A_z \times \mathbf{e}_z + B_z \mathbf{e}_z] \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \Delta A_z \mathbf{e}_z + \frac{1}{\mu_0} \nabla B_z \times \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

وبهذا فان مركبة z لكثافة التيار هو

$$j_z = -\frac{1}{\mu_0} \Delta A_z$$

بالتعويض عن كثافة التيار في معادلة توازن القوة باستخدام العلاقة التالية

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

نحصل على

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\ &= -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} [-\Delta A_z \mathbf{e}_z + \nabla B_z \times \mathbf{e}_z] \times [\nabla A_z \times \mathbf{e}_z + B_z \mathbf{e}_z] \\ &= -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} \{-\Delta A_z \nabla A_z - ((\nabla B_z \times \mathbf{e}_z) \cdot \nabla A_z) \mathbf{e}_z - B_z \nabla B_z\} \\ &= -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} \{-\Delta A_z \nabla A_z - B_z \nabla B_z + \nabla B_z \times \nabla A_z\} \end{aligned}$$

هنا الحد  $\nabla B_z \times \nabla A_z$  له مركبة z فقط لان  $\nabla A_z$  و  $\nabla B_z$  كلاهما في المستوى x,y. ولأنه في اتجاه z فقط فان  $\nabla B_z \times \nabla A_z = 0$  أو ان  $\nabla B_z \parallel \nabla A_z$ . ولهذا فإننا نعبر عن  $B_z$  بـ  $B_z(A_z)$  أي ان  $B_z = B_z(A_z)$ . وهذه يمكن أن تستخدم في العلاقة التالية:

$$B_z \nabla B_z = \frac{1}{2} \nabla B_z^2 = \frac{1}{2} \frac{dB_z^2}{dA_z} \nabla A_z$$

وخالصة فان شرط قوة التوازن يقودنا إلى





$$\nabla p = \left( j_z - \frac{1}{2\mu_0} \frac{dB_z^2}{dA_z} \right) \nabla A_z$$

لان تدرج الضغط pressure gradient يكون على امتداد التدرج  $A_z$  فان الضغط يجب أن يكون دالة في  $A_z$ . وهذا يقودنا إلى

$$\Delta A_z = -\mu_0 \frac{d}{dA_z} \left( p(A_z) + \frac{B_z(A_z)^2}{2\mu_0} \right)$$

في المعادلة  $p$  تمثل الضغط الحراري و  $B_z^2/2\mu_0$  الضغط المغناطيسي الناتج عن المركبة  $z$  في المجال المغناطيسي. أو في بعدين المجال المغناطيسي على امتداد اتجاه ثابت يعمل كضغط لحفاظ على الاتزان. بتعريف

$$\tilde{p}(A_z) = p + \frac{B_z^2}{2\mu_0}$$

يجب أن نبحث عن حل للمعادلة

$$\Delta A_z = -\mu_0 \frac{d}{dA_z} \tilde{p}(A_z). \quad (3.36)$$

عادة  $\tilde{p} = (A_z)$  تعرف على بنموذج بسيط. من الأنسب لطرق حلول تقليدية ان نعرف  $\tilde{p} = (A_z)$  على إنها دالة خطية في  $A_z$ . وسوف نبين فيما بعد إن الاتزان الحراري المحلي يعني أن  $p(A_z) \propto \exp(-2A_z/A_c)$  حيث  $A_c$  ثابت ينتج من معالجة الطاقة الحركية للاتزان.

تمرين: اعتبر إن  $p(A_z) = p_0 \exp(-2A_z/A_c)$  و  $B_z=0$ . اثبت أن في حالة بعد واحد  $(\partial/\partial y=0)$  و  $(\partial/\partial z=0)$  حل للمعادلة (36.3) وله الشكل  $A_z=A_c \text{Incosh}(x/L)$  والمجال المغناطيسي في هذه الحالة هو مجال سطح Harris.



**تمرين:** اعتبر حل في بعد واحد بـ  $\partial/\partial x \neq 0$ . وحدد التكامل الأول للمعادلة (36.3) بضرب المعادلة في  $dx/dA_z$  ومن ثم إجراء عملية التكامل. المعادلة الناتجة هي معادلة توازن الضغط الكلي. فسر طرف المعادلة بهذه الطريقة.

**تمرين:** اعتبر بلازما ثنائية الأبعاد عند  $\partial/\partial z = 0$  و  $B_z = 0$  واستخدم تمثيل المجال المغناطيسي بواسطة متجه الجهد. استبدل المجال المغناطيسي بقانون أوم المقاوم  $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$  من خلال متجه الجهد واثبت إن في حالة  $\eta = \text{const}$  يكون في مركبة  $z$   $\frac{\partial A_z}{\partial z} + \mathbf{u} \cdot \nabla A_z = \frac{\eta}{\mu_0} \Delta A_z$ . اشرح لماذا عند  $\eta = 0$  تكون هذه المعادلة في حالة شرط التجمد.

لاحظ إن النقاش السابق يمكن أن يعمم لإحداثيات غير الإحداثيات الكارتيزية. ومن الأنسب في حالة بلازما المختبر استخدام الإحداثيات الاسطوانية مع  $\partial/\partial \phi = 0$  عندما يكون هناك ثبات في الاتجاه الأ  $azimuthal$ . وإذا كان هناك ثبات على محور الاسطوانة يمكن استخدام  $\partial/\partial z = 0$ .

### 6.3 استقرار MHD

#### 1.6.3 مبدأ الطاقة

هنا المؤثر  $\mathbf{K}$  وتكامل الحجم يلعب دورا الجهد وطاقة الوضع الكهربائي في المعادلة أعلاه لإزاحات صغيرة  $\xi$ . هذا يماثل تماماً الوضع في الميكانيكا الكلاسيكية. افترض إن طاقة الحركة  $T$  وان طاقة الوضع  $U$  فان معادلة لاجرانجيان  $L(q, \dot{q}, t) = T - U$  لإحداثيات عامة  $q$  وسرعات  $\dot{q}$ . معادلات لاجرانج للحركة هي

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

نقطة توازن هي نقطة تكون عندها العجلة تساوي صفر وهذه تعطى بالمعادلة التالية:

$$\dot{P} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$



وهذا يعني

$$\frac{\partial L}{\partial q} = - \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=q_0} = 0$$

نحن الآن نعرف الإحداثيات على إن  $q = q_0$  ونفترض إن  $\xi$  هي إزاحات صغيرة من نقطة الاتزان. بالتعويض عن طاقة الوضع الكهربائي عند نقطة الاتزان بدلالة الإزاحة. أي إن

$$U(\xi) = U(q_0) + \frac{\partial U(q_0)}{\partial q} \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(q_0)}{\partial q^2} \xi^2 + \dots$$

بالتعويض عن  $\xi$  في معادلة لاجرانج مع العلم إن طاقة الحركة  $\frac{m}{2} \dot{\xi}^2$  ينتج لنا معادلة الحركة

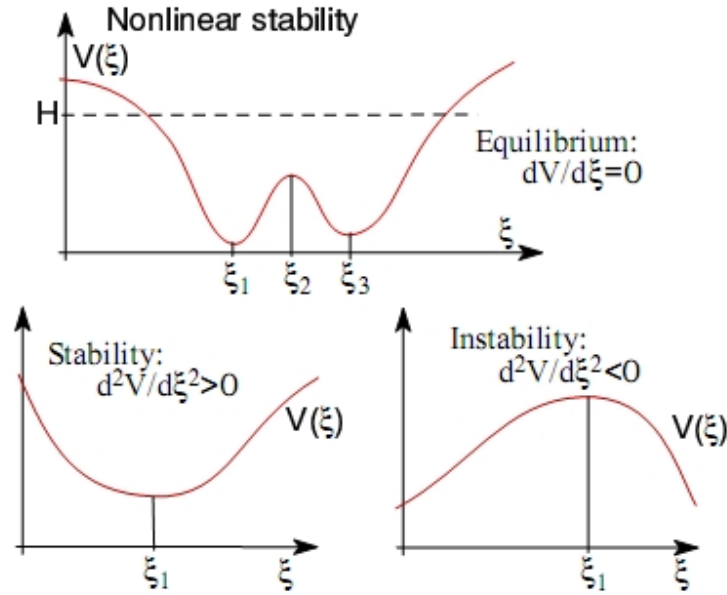
$$m\ddot{\xi} + \frac{\partial^2 U(q_0)}{\partial q^2} \xi = 0$$

والحل هو

$$\xi = \exp(\pm i\omega t) \quad \text{with} \quad \omega^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U(q_0)}{\partial q^2} \quad \text{for} \quad \frac{\partial^2 U(q_0)}{\partial q^2} > 0$$

$$\xi = \exp(\pm \omega t) \quad \text{with} \quad \omega^2 = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 U(q_0)}{\partial q^2} \quad \text{for} \quad \frac{\partial^2 U(q_0)}{\partial q^2} < 0$$

وعليه فإن الحل يكون متذبذب وبالتالي فإنه يكون مستقرًا إذا كان لطاقة الجهد قيمة صغرى local minimum ويكون غير مستقرًا ويزداد بدالة أسية إذا كانت لطاقة الجهد قيمة عظمى local maximum.



مبدأ الطاقة لمعادلات MHD يجب أن تفسر بنفس الطريقة. يكون الاتزان مستقرا إذا كانت طاقة الجهد موجبة لكافة الاضطرابات الصغيرة  $\xi$  ويكون الاتزان غير مستقرا إذا كانت الاضطرابات لطاقة الجهد سالبة (لاحظ إن قيم الاتزان للجهد هي صفر).

### 2.6.3 تطبيقات مبدأ الطاقة Applications of the energy principle

#### الاستقرار وحجم أنبوب الفيض المغناطيسي

تطور البلازما ذات  $\beta$  صغيرة يمكن التحكم فيه بواسطة المجال المغناطيسي حيث إن أنابيب الفيض المغناطيسي تحمل معظم الطاقة. نعرف حجم أنابيب الفيض المغناطيسي على النحو التالي:

$$V = \int \frac{dl}{B}$$

$$p + \Delta p = p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = p + \gamma p \frac{\Delta V}{V}$$



لاحظ إن  $dp/dt = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u}$  و  $\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dt} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$  والتي حصلنا عليه من

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dpV^\gamma}{dt} = 0$$

التغير في الضغط بجوار أنبوبة الفيض يكون

$$p(V + \Delta V) = p + \frac{dp}{dV} \Delta V$$

اعتبر إزاحات صغيرة من موضع الاتزان. إذا كان التغير في الضغط في أنبوبة الفيض أكبر من الضغط في الوسط المحيط بالأنابيب فإن مستوى طاقة منخفض هو مستوى الاتزان والطاقة يجب أن تجلب إلى النظام للوصول إلى التغير المطلوب. بمعنى آخر فإن هذا يكون مستقرًا.

$$\gamma p \frac{\Delta V}{V} + \frac{dp}{dV} \Delta V > 0$$

أو

$$-\frac{V}{p} \frac{dp}{dV} < \gamma$$

أو

$$-\frac{d \ln p}{d \ln V} < \gamma$$

لاحظ إن الحفاظ على كمية الحرارة ينتج لنا

$$-\frac{d \ln p}{d \ln V} = \gamma$$

ولشريحة مضغوطة ينتج لنا



$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < 2\gamma$$

وهذا تقريب  $\beta$  لنتائجنا السابقة.

### 7.3 أمواج MHD

فيما يلي سوف نقوم باختبار الأمواج النموذجية في البلازما. هذه الاختبار يشبه تماماً الأمواج الصوتية ولكن من المتوقع أن يكون للبلازما MHD درجات حرية أكثر للحركة وانتشار الأمواج يعتمد على اتجاه المجال المغناطيسي، أي إنها ليست متماثلة كما في حالة الأمواج الصوتية. لاحظ كذلك إن عدم التماثل في انتشار الأمواج أيضاً موجود في أمواج الجاذبية الأرضية.

في هذه الحالة من MHD سنبدأ من مجموعة كاملة معادلات MHD المثالية الخطية.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot \rho \mathbf{u} \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\mathbf{u} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u}\end{aligned}$$

حيث إننا قمنا هنا بجمع معادلة الحث مع قانون أوم. وبتحويل المعادلة إلى الشكل الخطي كما فعلنا في الجزء السابق، ولكن لن نقوم بإدخال إزاحة صغيرة ولكن سنحافظ على  $u_1$  كمتغير. وبالتحديد متغيرات MHD يمكن التعبير عنها على النحو التالي:



$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho_1 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \\ p &= p_0 + p_1\end{aligned}$$

وللتبسيط سنفترض إن كل الكميات المترزة على إنها ثوابت، أي انه لان نتعامل مع بلازما غير متماثلة. بالتعويض عن الاضطراب في معادلات MHD ينتج لنا نفس الشيء الذي حصلنا عليه في حالة الإزاحة الصغيرة.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} &= -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} &= -\gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1\end{aligned}$$

بأخذ المشتقة الثانية لمعادلة كمية الحركة بالنسبة للزمن ينتج لنا

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} &= -\nabla \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \left( \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}_0 \\ &= \gamma p_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) + \frac{B_0^2}{\mu_0} (\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{e}_B))) \times \mathbf{e}_B\end{aligned}$$

حيث إننا استخدمنا  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_B$  والآن بالقسمة على  $\rho_0$  وبتعريف سرعة الصوت  $c_s$  وسرعة Alfven  $v_A$  على النحو التالي:



$$c_s^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho}$$

$$v_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0}$$

نحصل على

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) + v_A^2 (\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{e}_B))) \times \mathbf{e}_B$$

وهذا يقودنا إلى

$$\omega^2 \mathbf{u}_1 = c_s^2 \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1) - v_A^2 \mathbf{e}_B \times (\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{e}_B)))$$

الآن نختار نظام الإحداثيات بحيث يكون اتجاه المحور  $z$  في اتجاه الاتزان أي اتجاه المجال المغناطيسي الثابت والمتجه  $\mathbf{k}$  يقع في المستوى  $x, z$  ويعطي بالمعادلة التالية:

$$\mathbf{k} = k_{\perp} \mathbf{e}_x + k_{\parallel} \mathbf{e}_z$$

وهذا يؤدي إلى المركبات الثلاثة التالية للمعادلة

$$\begin{aligned} (\omega^2 - v_A^2 k_{\parallel}^2 - (c_s^2 + v_A^2) k_{\perp}^2) u_{1x} - c_s^2 k_{\parallel} k_{\perp} u_{1z} &= 0 \\ (\omega^2 - v_A^2 k_{\parallel}^2) u_{1y} &= 0 \\ (\omega^2 - c_s^2 k_{\parallel}^2) u_{1z} - c_s^2 k_{\parallel} k_{\perp} u_{1x} &= 0 \end{aligned}$$

أو في صورة مصفوفة  $\underline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{u}_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - v_A^2 k_{\parallel}^2 - (c_s^2 + v_A^2) k_{\perp}^2 & 0 & -c_s^2 k_{\parallel} k_{\perp} \\ 0 & \omega^2 - v_A^2 k_{\parallel}^2 & 0 \\ -c_s^2 k_{\parallel} k_{\perp} & 0 & \omega^2 - c_s^2 k_{\parallel}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \end{pmatrix} = 0$$





تمرين: اشتق المصفوفة السابقة.

هذه المعادلات هي معادلات خطية مستقلة وتعطي حلول غير بديهية إذا كان المحدد يساوي صفر.

### (a) أمواج Alfven

الحل الأول الغير بديهي يعين بواسطة المركبة  $y$  للمعادلات أعلاه. هذه المركبة منفصلة عن المركبتين الأخيرتين لان  $u_{1y}$  لا تظهر في المعادلة الأولى والثالثة. والمحدد  $\omega^2 - v_A^2 k_{\parallel}^2$  يظهر كعامل مشترك. الحل يكون على النحو التالي:

$$\omega^2 = v_A^2 k_{\parallel}^2 = \frac{k_{\parallel}^2 B_0^2}{\mu_0 \rho_0}$$

أو

$$\omega = \pm \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} = \pm k v_A \cos \theta$$

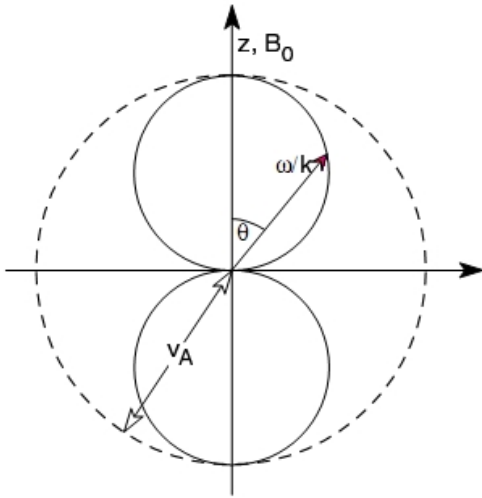
وسرعة المجموعة  $V_g = d\omega/dk$  يكون على النحو التالي:

$$\mathbf{v}_g = \pm \frac{\mathbf{B}_0}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} = \pm v_A \mathbf{e}_B$$

وهذا مستقل عن  $k$  ودائما في اتجاه المجال المغناطيسي. وسرعة الطور phase velocity هي

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \pm v_A \cos \theta$$

حيث الزاوية  $\theta$  هي الزاوية المحصورة بين  $k$  و  $B_0$ . وهذه هي أمواج Alfven.

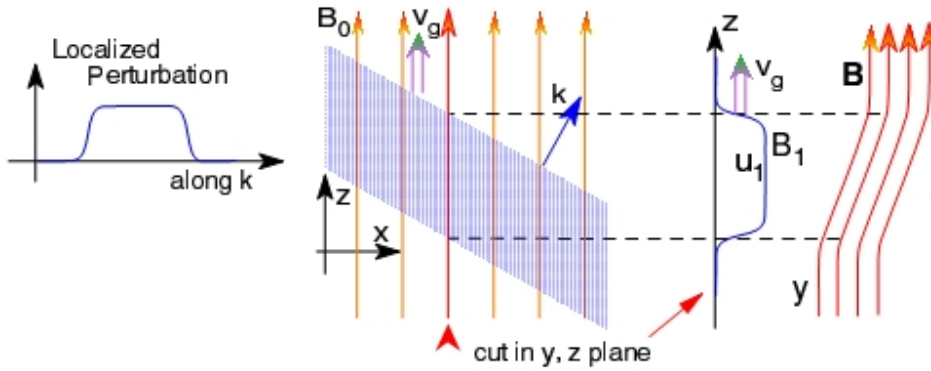


يستخدم منحني Clemmov-Mullaly-Allis لتمثيل الطور وسرعة المجموعة في الإحداثيات القطبية، حيث متجه نصف القطر يمثل قيمة السرعة والزاوية  $\theta$  تمثل زاوية الانتشار. لاحظ إن اتجاه سرعة المجموعة لأمواف Alfven (والتي هي في اتجاه نقل الطاقة وكمية الحركة) تكون دائما في اتجاه المجال المغناطيسي! لاحظ أيضا انه في حالة  $\theta=90^\circ$  تكون مفردة وان الموجة لا تنتشر والنقطة عند  $\theta=90^\circ$  يجب أن تستبعد من مخطط مجموعة السرعة.

#### خواص إضافية لأمواف Alfven:

- سرعة الاضطراب  $u_1 \perp B_0$ .
- الموجة غير منضغطة:  $\nabla \cdot u_1 = ik \cdot u_1 = 0$  or  $u_1 \perp k$
- اضطراب المجال المغناطيسي:  $\omega B_1 = -k \times (u_1 \times B_0) = -k_{\parallel} u_1$  أي ان اضطراب المجال المغناطيسي يكون على استقامة سرعة الاضطراب (وكليهما عموديا على  $k$  وعلى  $B_0$ ).
- كثافة التيار الكهربائي  $j_1 \sim k \times B_0$ ، أي ان اضطراب التيار يكون عموديا على كلا من  $k$  و  $B_0$ .
- موجة Alfven توجد أيضا بدون أن تؤثر على السعات الغير خطية.

اعتبر اضطراب محلي لـ  $B_1$  على استقامة متجه الانتشار  $k$  لموجة Alfven والتشويه في المجال المغناطيسي موضح في الشكل التالي:



موجة Alfvén لها أهمية كبيرة في أنظمة البلازما. إنها فعالة في نقل الطاقة وكمية الحركة على طول المجال المغناطيسي. ومن بين التطبيقات الكثيرة للبلازما في الفضاء فان موجة Alfvén لها أهمية خاصة في الربط بين طبقة المجنيتوسفير والايروسفير.

ومن العلاقات المستخدمة في تعريف أمواج Alfvén في الفيزياء الفلكية علاقة Walén وهي على النحو التالي:

$$\Delta \mathbf{u} = \pm \Delta \mathbf{v}_A = \pm \Delta \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

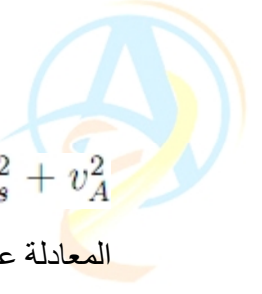
هذه العلاقة متحققة لأمواج Alfvén الخطية والغير خطية، ومن الممكن أيضا استخدامها لتحديد الانقطاعات (الغير خطية) المقابلة.

### (b) النمط السريع والبطيء Fast and slow mode

الحل الآخر الغير بسيط يعطى بدلالة  $\underline{\mathbf{W}} = 0$  أو

$$(\omega^2 - v_A^2 k_{\parallel}^2 - (c_s^2 + v_A^2) k_{\perp}^2) (\omega^2 - c_s^2 k_{\parallel}^2) - c_s^4 k_{\parallel}^2 k_{\perp}^2 = 0$$

هذه هي علاقة التشتت للحلول الأربعة الإضافية والتي تعطى بواسطة جذور المعادلة. لان المعادلة double quadratic، أي إنها تعتمد فقط على  $\omega^2$  فانه يوجد حلان مختلفان لـ  $\omega^2$ . باختصار المعادلة



المعادلة على النحو التالي: (حيث  $f$  تشير إلى النمط السريع - السبب في هذا سيتم توضيحه) يمكن إعادة كتابة

$$\omega^4 - c_f^2 k^2 \omega^2 + v_A^2 c_s^2 k_{\parallel}^2 k^2 = 0 \quad (3.37)$$

مع الحلول

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{k^2}{2} \left\{ c_f^2 \pm \left[ c_f^4 - 4v_A^2 c_s^2 \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \right]^{1/2} \right\} \\ &= \frac{k^2}{2} \left\{ v_A^2 + c_s^2 \pm \left[ (v_A^2 + c_s^2)^2 - 4v_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} \right\} \end{aligned}$$

الحل بالإشارة الموجبة يسمى بالنمط السريع fast mode والحل بالإشارة السالبة يسمى النمط البطيء slow mode.

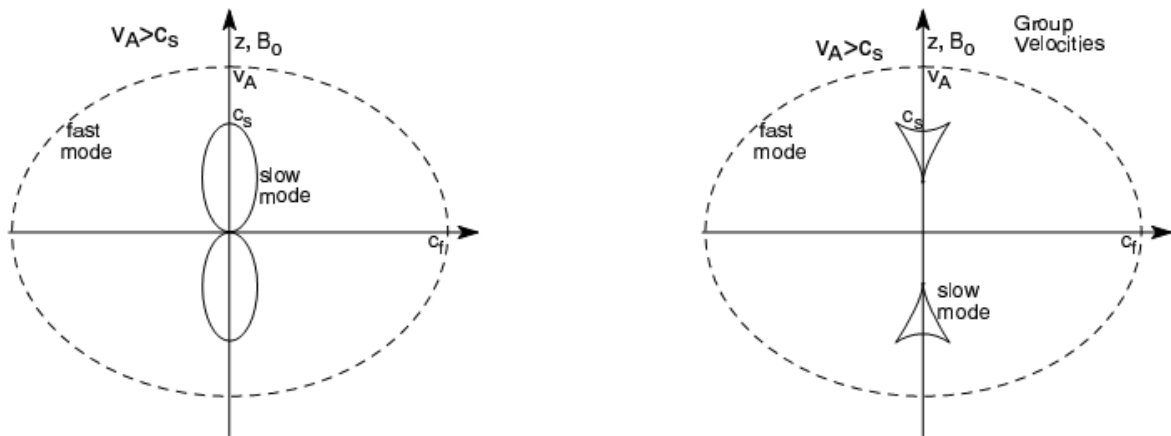
### الموجة السريعة fast wave

هذه موجة MHD بأعلى سرعة انتشار، أي إن المعلومات في بلازما MHD لا يمكن أن تنتقل بسرعة أكبر من هذه السرعة.

- سرعة الطور على امتداد المجال المغناطيسي  $\omega^2/k^2 = \max[v_A^2, c_s^2]$ .
- سرعة الطور عمودياً على المجال المغناطيسي  $\omega^2/k^2 = c_f^2 \equiv v_A^2 + c_s^2$ .
- الحد  $\omega^2 - v_A^2 k^2 = 0 : c_s^2 \ll v_A^2$  يؤدي إلى أن النمط السريع يصبح معروف باسم موجة Alfven المضغوطة. لاحظ إن أمواج Alfven المضغوطة لها سرعة مجموعة تساوي سرعة الطور لها (وهذا مختلف عن موجة Alfven العادية أو المقطوعة).



ابرز مثال على الموجة السريعة في مجال الفيزياء الفلكية هو صدمة القوس للأرض Earth's bow shock. هذه الأشكال من موجة الصدم ناتج عن سرعة الرياح الشمسية والتي هي أسرع من الموجة السريعة. والموجة السريعة مهمة في مجال نقل الطاقة عموديا على المجال المغناطيسي. والسرعة البطيئة كما في موجة Alfvén على امتداد المجال المغناطيسي والتي هي صغيرة جدا. وبالتالي فإن الموجة السريعة هي موجة MHD الوحيدة القادرة على نقل الطاقة عموديا على المجال المغناطيسي.



### الموجة البطيئة Slow wave

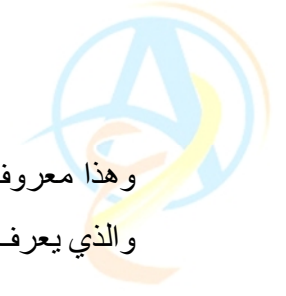
الموجة البطيئة تعتبر في المرتبة الثالثة من أمواج MHD الأساسية. وعندها تكون سرعة الطور اقل من أو

$$\text{يساوي } \min [v_A^2, c_s^2]$$

الخصائص الأساسية:

- سرعة الطور على امتداد المجال المغناطيسي  $\omega^2/k^2 = \min [v_A^2, c_s^2]$ .
- سرعة الطور عموديا على المجال المغناطيسي  $\omega^2/k^2 = 0$ .
- عند الحدود  $v_A^2 \ll c_s^2$  و  $c_s^2 \ll v_A^2$  تختفي الموجة البطيئة.

تطبيقات الموجة البطيئة ليست كذلك التي تلفت الأنظار مثل موجة MHD ولكن أهمية الموجة البطيئة تكمن في شرح تركيب البلازما في المنطقة الواقعة بين قوس موجة الصدمة والغلاف المغناطيسي (مجنيوسفير)،



وهذا معروف لتطبيقات كثيرة مثل إعادة ترتيب خطوط المجال المغناطيسي في المناطق المحيطة بالبلازما والذي يعرف بالمصطلح magnetic reconnection.

### ملاحظات واستنتاجات ختامية

يوجد هناك موجة إضافية في MHD وهي موجة الصوت. ويتم الحصول عليها باستخدام  $k_{\perp}=0$  و  $u_{\perp}=0$  مثل سرعة الاضطراب على امتداد المجال المغناطيسي ولهذا فان اضطراب المجال المغناطيسي يكون 0. على كل حال، هذه الحالة فريدة وتوجد فقط عندما يكون انتشار الموجة على امتداد المجال المغناطيسي، أي إن اتجاه السرعة يكون موازياً لـ  $B_0$  بالضبط وكذلك المتجه  $k$  يكون أيضاً موازياً لـ  $B_0$ . في الواقع الموجة الصوتية إما أن تكون جزء من الموجة البطيئة أو أن تكون جزء من الموجة السريعة وهذا يعتمد على  $c_s^2 < v_A^2$  أو على  $c_s^2 > v_A^2$ .

تمرين: اشتق علاقات التشتت لـ  $k$  عندما تكون موازية لـ  $B_0$ . ما هي موجات الحل الثلاثة؟

وينبغي أيضاً ملاحظة انه كما في موجة الصدمة الصوتية sonic shock wave فان أمواج MHD ترتبط مع موجات الصدمة والانقطاعات في الموجات، أي انه يكون هناك موجة صدمة سريعة ناتجة عن الانتقال من تدفق البلازما السريعة جداً (أسرع من أسرع نمط سرعة) إلى سرعة اقل (اقل من أسرع نمط سرعة)، مع العلم بان موجة الصدمة البطيئة والمتوسطة السرعة تقابل أمواج Alfven.