



Laser Beams and Resonators

H. KOGELNIK AND T. LI

أشعة الليزر والمذبذبات

الخلاصة

هذا البحث العلمي هو بمثابة إلقاء الضوء ومراجعة حول نظرية أشعة الليزر والمذبذبات. والهدف منه تقديم شرح مفيد في هذا المجال. حيث انه لم تبذل محاولة شاملة لشرح هذا الموضوع من قبل. وهنا تجد تأكيد على المعادلات واشتقاقها والتي تؤدي إلى فهم أساسي للنتائج التي تحمل أهمية عملية.

1. المقدمة Introduction

الإشعاع المترابط المتولد بواسطة الليزر أو الميزر والذي يعمل في الطول الموجي عند نطاق الطيف المرئي أو طيف الأشعة تحت الحمراء والتي تظهر في صورة شعاع ليزر. تم دراسة خصائص الرنين لمثل هذا الشعاع وعلاقته بتركيب المذبذب، وقد تم إجراء دراسة شاملة لخصائص انتشار الشعاع في الفراغ الحر، وسلوك تفاعله مع العناصر البصرية والأجهزة. هذه الورقة العلمية تعرض شرحاً لنظرية أشعة الليزر واشتقاقها والتي تؤدي إلى فهم أساسي للنتائج والتي لها قيمة عملية.

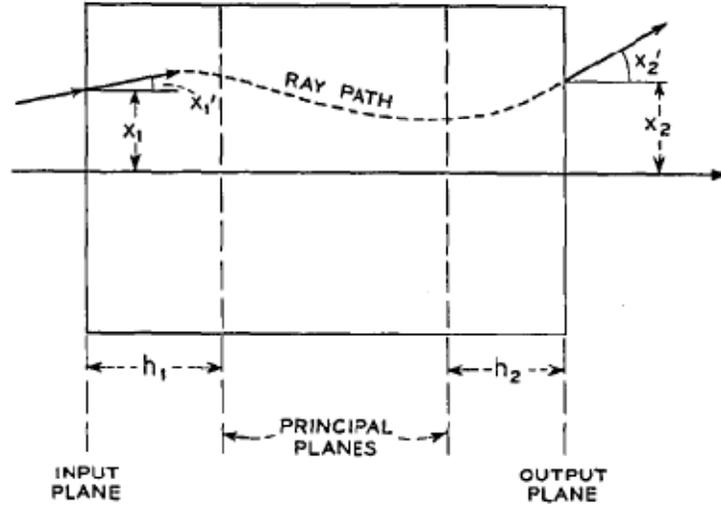


تاريخياً، يعود موضوع مذبذبات الليزر إلى [1] Dicke، و[2] Prokhorov، و Schawlow و Townes [3] بشكل مستقل استخدموا جهاز فابير بيروت Fabry-Perot كمذبذب ليزر. ودراسة الأنماط في هذا الجهاز، والتي تظهر عن طريق ظاهرة الحيود، حسبت أولاً بواسطة Fox و[4] Li. كما طور كلا من Boyd و Gordon [5]، و Boyd و Kogelnik [6] نظرية للمذبذبات ذات المرايا الكروية واستخدم تقريب الأنماط بواسطة الأشعة الموجية. كما إن مبدأ أمواج الأشعة الكهرومغناطيسية قد استخدم بواسطة Goubau و Schwing [7]، واللذان تحققاً من خواص عدد متعاقب من العدسات لتوجيه الأمواج الكهرومغناطيسية. محاولة أخرى للأشعة الموجية تمت بواسطة [8] Pierce. كما إن الباحثين Goubau [9]، [11]، [10] Kogelnik وآخرون قاموا بدراسة وتحليل سلوك أشعة الليزر الجاوسيان عند تفاعلها مع العديد من الأنظمة البصرية.

البحث الحالي يلخص العديد من النظريات ويقسمها إلى ثلاثة أجزاء. الجزء الأول يتعامل مع مرور الأشعة المحورية خلال الأنظمة البصرية والمبني على الهندسة البصرية. والجزء الثاني هو تحليل لأشعة الليزر والمذبذبات، بالأخذ بعين الاعتبار طبيعة أمواج الأشعة ولكن بإهمال تأثير الحيود الناتج عن الحجم المحدود للمنفذ. أما الجزء الثالث يتعامل مع أنماط المذبذب، بالأخذ بعين الاعتبار تأثير الحيود الناتج عن المنفذ. وكلما كان ممكناً تم عرض النتائج المفيدة في صورة معادلات وجداول وأشكال ومنحنيات.

2. تحليل الأشعة المحورية PARAXIAL RAY ANALYSIS

دراسة مرور الأشعة المحورية خلال النظام البصري في المذبذبات، ومسارات النفاذ، والأنظمة المشابهة يمكن أن تكشف عن العديد من الميزات المهمة لهذه الأنظمة. ومن هذه الميزات الخواص الهندسية والتي هي استقرارية التركيب البصري [6]، وكذلك الفقد في المذبذبات غير المستقرة [12]. انتشار الأشعة المحورية خلال العديد من التراكيب البصرية يمكن أن يوصف من خلال مصفوفات الأشعة. والمعرفة لهذه المصفوفات مهم جداً بالأخص عند استخدامهم لوصف انتشار أشعة الليزر الجاوسيين خلال هذه التراكيب البصرية، وهذا ما سوف يتم مناقشته في الجزء 3. والجزء الحالي يصف باختصار بعض مبادئ الأشعة المفيدة في فهم أشعة الليزر والمذبذبات، وكذلك قائمة بمصفوفات الأشعة للعديد من الأنظمة البصرية ذات الاهتمام. ومعالجة أكثر تفصيلاً لانتشار الأشعة يمكن أن توجد في الكتب [13] والبحوث العلمية على مذبذبات الليزر [14].



الشكل 1 المستويات المرجعية للنظام البصري. ويوضح الشكل مسار شعاع نموذجي

2.1 مصفوفة نقل الأشعة Ray Transfer Matrix

الشعاع المحوري في مقطع عرضي ($z=\text{const}$) لنظام بصري يميز بالمسافة x من المحور البصري z وزاويته أو الميل x' بالنسبة إلى المحور. مسار الشعاع النموذجي خلال التركيب البصري موضح في الشكل 1. الميل x' للأشعة المحورية يفترض انها صغيرة. ومسار الشعاع خلال أي نظام بصري يعتمد على الخواص البصرية للتركيب البصري وعلى الظروف الداخلية، أي الموقع x_1 والميل x_1' للشعاع عند مستوى دخوله النظام. وللأشعة المحورية فان الكميات المقابلة الناتجة هي x_2 و x_2' وهي ذات اعتماد خطي على الكميات الداخلة. وهذا مناسب جدا أن يكتب في صورة مصفوفة على النحو التالي:

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_1' \end{vmatrix} \quad (1)$$



الجدول 1

مصفوفات انتقال الأشعة لستة تراكيب بصرية مختلفة

NO	OPTICAL SYSTEM	RAY TRANSFER MATRIX
1		$\begin{vmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
2		$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{vmatrix}$
3		$\begin{vmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{vmatrix}$
4		$\begin{vmatrix} 1 - \frac{d_2}{f_1} & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f_1} \\ \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d_2}{f_1 f_2} & 1 - \frac{d_1}{f_2} - \frac{d_2}{f_2} + \frac{d_1 d_2}{f_1 f_2} \end{vmatrix}$
5		$\begin{vmatrix} \cos d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} & \frac{1}{\sqrt{n_0 n_2}} \sin d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \\ -\sqrt{n_0 n_2} \sin d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} & \cos d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \end{vmatrix}$
6		$\begin{vmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

حيث الميل موجبا كما هو مشار له في الشكل. المصفوفة ABCD تعرف باسم مصفوفة انتقال الأشعة ray transfer matrix. والمحدد لها بصفة عامة هو الوحدة

$$AD - BC = 1. (2)$$

عناصر المصفوفة ترتبط مع البعد البؤري f للنظام والموقع للمستويات الأساسية بالعلاقة التالية:



$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{C} \\ h_1 &= \frac{D-1}{C} \\ h_2 &= \frac{A-1}{C} \end{aligned} \quad (3)$$

حيث أن h_1 و h_2 هما المسافات للمستويات الأساسية عن مستويات الدخول والخروج كما في الشكل 1. في الجدول 1 هناك قائمة لمصفوفات انتقال الأشعة لستة تراكيب بصرية أساسية. المصفوفة رقم 1 تصف انتقال الأشعة على مسافة قدرها d . ورقم 2 تصف انتقال الأشعة خلال عدسة رقيقة بعدها البؤري f . وهنا مستوى الدخول والخروج هما على يسار ويمين العدسة مباشرة. ورقم 3 عبارة عن مجموع رقم 1 و 2. فهي تحدد الأشعة التي تعبر مسافة d أولاً ثم بعد ذلك خلال العدسة الرقيقة. وإذا عكس هذا التابع نبدل العناصر القطرية. والمصفوفة رقم 4 تصف الأشعة المارة خلال تركيبين من النوع 3. ونحصل عليها بضرب المصفوفتين. مصفوفة انتقال الأشعة للوسط الشبيه بالعدسة بطول d يعطى في النوع رقم 5. وفي هذا الوسط فإن معامل الانكسار يتغير بمعادلة تربيعية مع المسافة r من المحور البصري.

$$n = n_0 - \frac{1}{2}n_2r^2. \quad (4)$$

التغير في معامل الانكسار في هذا النوع ممكن أن يحدث في بلورات الليزر وفي العدسات الغازية. والمصفوفة للمادة العازلة كهربياً بمعامل انكسار n وطول d معطاة في المعادلة رقم 6. المصفوفة تشير إلى الوسط المحيط الذي معامل انكساره 1 ويحسب باستخدام قانون سنيل. وبالمقارنة مع النوع رقم 1 يوضح أن الأشعة المحورية فإن المسافة الفعالة تقصر بواسطة المواد الأكثر كثافة ضوئية، في حين كما نعرف فإن المسافة الضوئية تزداد.



2.2 التتابع الدوري Periodic Sequences

أشعة الضوء التي تتأرجح للأمام والخلف بين المرايا الكرية في مذبذب الليزر تتعرض لعمل تبئير دوري. التأثير على الأشعة هو نفسه في التتابع الدوري للعدسات [15] والتي يمكن أن تستخدم كخط تحول بصري. التتابع الدوري لنظام بصري متماثل موضح في الشكل 2. حيث إن عنصر واحد للتتابع يوصف بواسطة مصفوفة ABCD. الأشعة المنتقلة عبر عدد n من العناصر المتعاقبة لسلسلة ما توصف بواسطة القوة n^{th} للمصفوفة. وهذا يمكن أن يقدر بواسطة نظرية Sylvester's

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^n = \frac{1}{\sin \Theta} \quad (5)$$

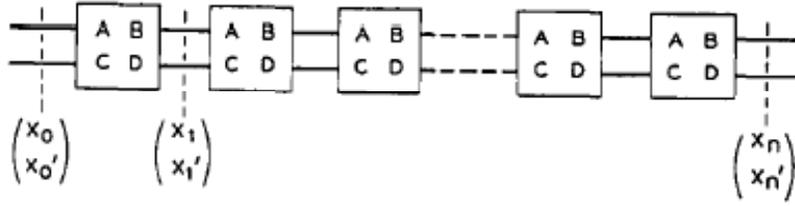
$$\begin{vmatrix} A \sin n\Theta - \sin(n-1)\Theta & B \sin n\Theta \\ C \sin n\Theta & D \sin n\Theta - \sin(n-1)\Theta \end{vmatrix}$$

$$\cos \Theta = \frac{1}{2}(A + D). \quad (6)$$

التتابع الدوري يمكن أن يصنف إما كمستقر stable أو غير مستقر unstable. التتابع يكون مستقرا عندما يكون المسار $(A+D)$ يخضع للمتباعدة التالية:

$$-1 < \frac{1}{2}(A + D) < 1. \quad (7)$$

تحقيق المعادلة (5) يوضح إن الأشعة التي تمر عبر التتابع المستقر تعيد تبئيرها دوريا. وللأنظمة الغير مستقرة، فإن الدوال الهندسية في المعادلة تصبح دوال قطع زائد، وهذا يشير إلى أن الأشعة تصبح أكثر فأكثر تشتتا كلما مرت في هذا التتابع.



الشكل 2. تتابع دوري للأنظمة المتماثلة، وكل نظام يوصف بواسطة مصفوفته ABCD.

3.2 استقرار مذبذبات الليزر Stability of Laser Resonators

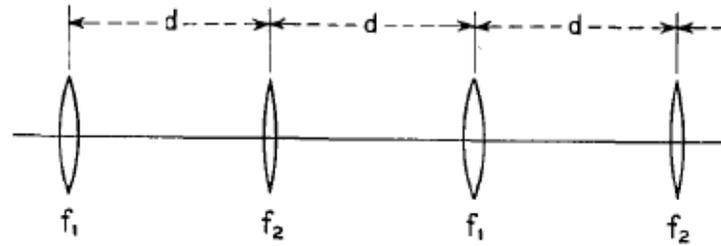
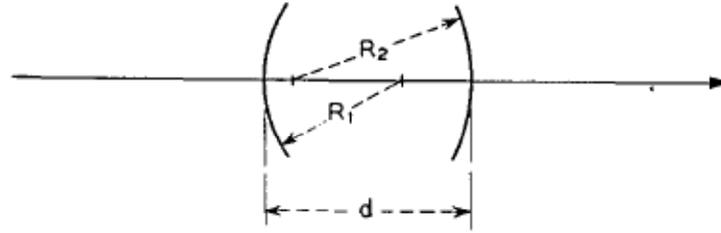
مذبذب الليزر بمرايا كرية غير متساوية التحذب هو مثال نموذجي للتتابع الدوري الذي يمكن أن يكون مستقرا أو غير مستقرا [6]. مثالا على هذا المذبذب المزدوج موضحا في الشكل 3، والذي هو عبارة عن مجموعة من العدسات المتعاقبة. الأشعة التي تمر عبر التركيبين هي نفسها، ما عدا إن أشكال الأشعة تكون مطوية داخل المذبذب وتكون مسطحة في تتابع العدسات. البعدين البؤريين f_1 و f_2 للعدسات يكونا مساويين للبعد البؤري للمرايا، أي إنهما يحددان بواسطة نصف قطر التحذب R_1 و R_2 للمرآتين ($f_1=R_1/2$ ، و $f_2=R_2/2$). المسافات بين العدسات هي مساوية للمسافات بين المرايا d . ويمكن لنا أن نختار، كما في عناصر التتابع الدوري، فواصل يتبعها عدسة واحدة بالإضافة إلى مسافة أخرى ويتبعها عدسة ثانية. والمصفوفة ABCD لهذا العنصر معطى في المعادلة في الرقم 4 في الجدول 1. ومن هذا يمكن أن نحصل على التتابع، ونكتب شرط الاستقرار (7) على النحو التالي:

$$0 < \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) < 1. \quad (8)$$

ولنوضح بشكل تخطيطي أي من نوعي المذبذبات مستقرا وأيها غير مستقر، فانه من المفيد أن نرسم مخطط الاستقرار بحيث إن كل نوع مذبذب موضح بنقطة. وهذا موضح في الشكل 4 حيث أن العوامل d/R_1 ، d/R_2 مرسومان على محاور الإحداثيات، الأنظمة الغير مستقرة موضحة بنقاط على المناطق المظلمة.

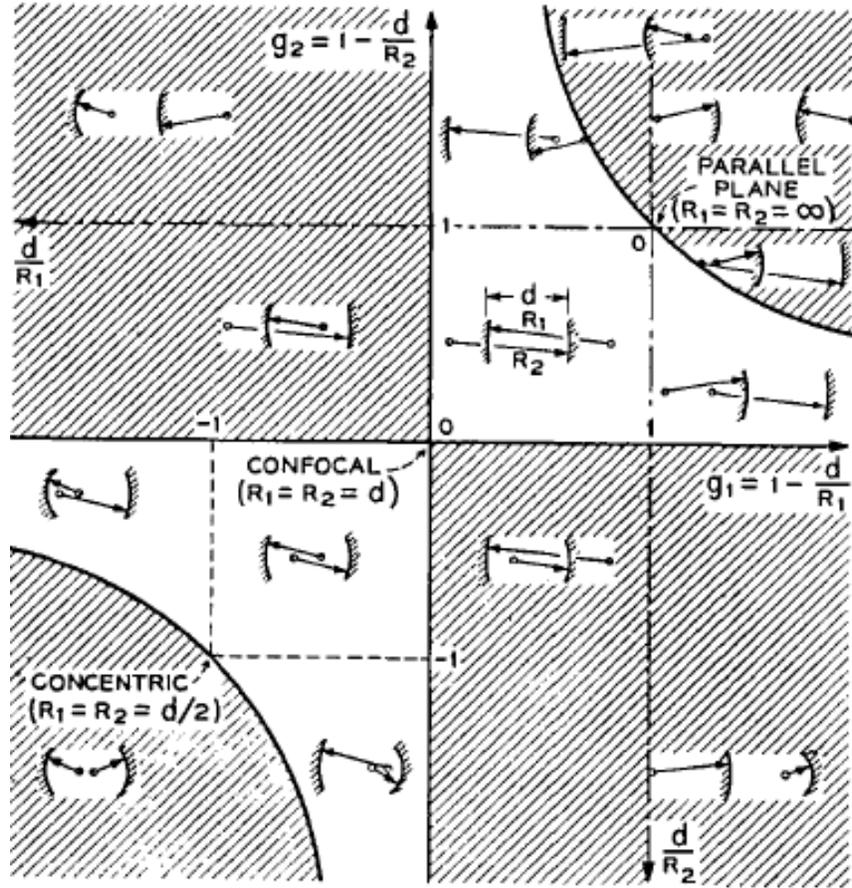


الكثير من أنواع المذبذبات، موضحة بمواقعها النسبية بالنسبة لمراكز التحذب للمرايا، وهي في المناطق المناسبة على المخطط. كذلك يدخل كمحور بديل العوامل g_1 و g_2 واللذان تلعبان دورا هاما في نظرية الحيود في المذبذبات (انظر الجزء 4).



$$R_1 = 2f_1 \quad , \quad R_2 = 2f_2$$

الشكل 3. مذبذب المرايا الكرية والمكافئة لها من العدسات المتعاقبة



الشكل 4 مخطط الاستقرار. نظام المذبذب غير المستقر يقع في المناطق المظللة.

3. التحليلات الموجية للأشعة والمذبذبات

في هذا الجزء فان الطبيعة الموجية لأشعة الليزر تؤخذ في الحسبان، ولكن بإهمال تأثير الحيود الناتج عن الحجم الصغير للمنافذ. وهذا سوف يتم مناقشته في الجزء الرابع. النتائج المشتقة هنا تطبق على الأنظمة البصرية ذات المنافذ الكبيرة، أي بمنافذ تعترض جزء مهمل من طاقة الإشعاع. نظرية الأشعة الضوئية أو "موجات الأشعة" قد وضحت في البداية بواسطة Boyd و Gordon [5] و بواسطة Goubau و Schwering [7]. المناقشة الحالية هي جاءت كنتيجة لتحليلات الموضحة في المرجع [11].



1.3 الحل التقريبي للمعادلة الموجية Approximate Solution of the Wave Equation

أشعة الليزر تشبه في كثير من النواحي الأمواج المستوية، ولكن، توزيع الشدة لها ليس منتظما وكذلك طور جبهة الموجة منحنى قليلا. وكلا من مركبة المجال والجهد للضوء المترابط يحقق المعادلة الموجية التالية:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (9)$$

حيث إن $k=2\pi/\lambda$ هي ثابت الانتشار في الوسط.

وللضوء المنتشر في الاتجاه z تكون المعادلة على النحو التالي:

$$u = \psi(x, y, z) \exp(-jkz) \quad (10)$$

حيث ψ هي دالة مركبة متغيرة تمثل الاختلافات بين شعاع الليزر والموجة المستوية، وتعرف باسم التوزيع الغير منتظم للشدة، وتوضح تمدد الأشعة مع مسافة الانتشار، وتحذب جبهة الطور، والاختلافات الأخرى الموضحة أدناه. وبإدخال المعادلة (10) في المعادلة (9) نحصل على

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2jk \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

حيث افترض إن ψ تتغير ببطء مع z حيث يمكن إهمال المشتقة الثانية $\partial^2 \psi / \partial z^2$.

المعادلة التفاضلية (11) لـ ψ لها شكل يشابه معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن. ومن السهل أن نرى أن.

$$\psi = \exp \left\{ -j \left(P + \frac{k}{2q} r^2 \right) \right\} \quad (12)$$

هو حل للمعادلة (11)، حيث أن

$$r^2 = x^2 + y^2. \quad (13)$$



المعامل $P(z)$ يمثل إزاحة الطور المركب المرتبط مع انتشار شعاع الضوء، و $q(z)$ معامل الشعاع المركب الذي يصف تغيرات جاوسيان في شدة الأشعة مع المسافة من المحور البصري، كذلك التحذب في جبهة الطور والتي تكون كروية بالقرب من المحور. وبعد إدخال المعادلة (12) في المعادلة (11) ومقارنة الحدود المتساوية القوة في r نحصل على العلاقات

$$q' = 1 \quad (14)$$

و

$$P' = -\frac{j}{q} \quad (15)$$

حيث ان الشرطة ، تشير إلى المشتقة بالنسبة إلى z . والتكامل للمعادلة (14) يعطي

$$q_2 = q_1 + z \quad (16)$$

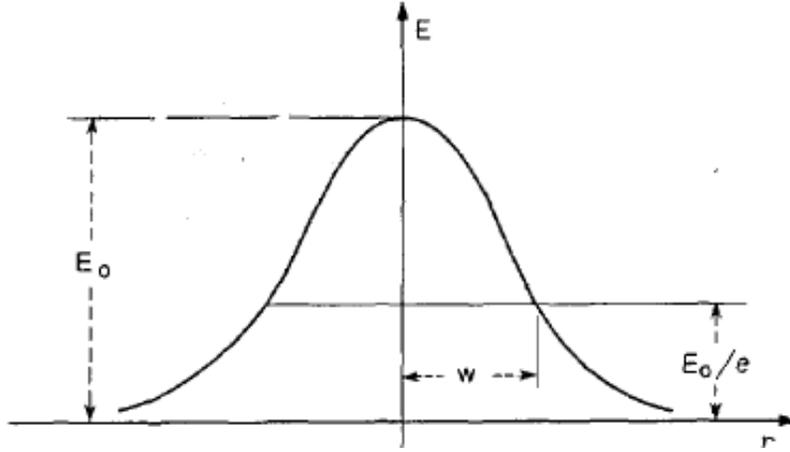
والتي تربط معامل الشعاع q_2 في المستوى الأول (مستوى الخروج) مع المعامل q_2 في المستوى الثاني (مستوى الدخول) والذي يفصله على المستوى الأول بمسافة z .

2.3 قوانين الانتشار للنمط الأساسي Propagation Laws for the Fundamental Mode

شعاع مترابط بتوزيع شدة جاوسيان كما حصلنا عليه في الأعلى ليس هو الحل الوحيد للمعادلة (11)، ولكنه الأكثر أهمية. هذا الشعاع غالبا ما يعرف باسم الشعاع الرئيسي fundamental mode بالمقارنة مع الأنماط ذات الرتب الأعلى والتي سنناقشها لاحقا. ولأهميته سوف نناقشه هنا بشيء من التفصيل.

ومن اجل التسهيل سوف ندخل معاملين شعاع حقيقيين R و w يرتبطان بمعامل مركب q بالمعادلة التالية:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - j \frac{\lambda}{\pi w^2} . \quad (17)$$



الشكل 5. توزيع السعة للشعاع الأساسي.

عندما ندخل المعادلة (17) في المعادلة (12) فإن المعنى الفيزيائي لهذين المعاملين يصبح أوضح. ويمكن أن نرى أن $R(z)$ هو نصف قطر التحدب لجبهة الموجة التي تتقاطع مع المحور عند z ، و $w(z)$ هي قياس التناقص في سعة المجال E مع المسافة من المحور. هذا التناقص له شكل جاوسيان، كما هو موضح في الشكل 5، و w هي المسافة عندما تصبح السعة $1/e$ في قيمتها على المحور. لاحظ إن توزيع الشدة هو توزيع جاوسيان في كل مساحة مقطع الشعاع، واتساع شكل منحنى جاوسيان يتغير على امتداد المحور. المعامل w يعرف عادة باسم نصف قطر الشعاع أو حجم البقعة spot size و $2w$ هي قطر الشعاع.

ينكمش الشعاع الجاوسيان لأصغر قطر ممكن $2w_0$ عند خصر الشعاع beam waist حيث تكون جبهة الطور مستوية. وإذا قيست z من خصر الشعاع، فإن قوانين الاتساع للشعاع تفترض أن تكون بسيطة الشكل. ومعامل الشعاع المركب عند الخصر يكون تخيلياً بالكامل.



$$q_0 = j \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (18)$$

والمسافة z من الخصر يكون لها المعامل التالي:

$$q = q_0 + z = j \frac{\pi w_0^2}{\lambda} + z. \quad (19)$$

وبعد دمج المعادلتين (19) و (17) يمكن مساواة الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لنحصل على:

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] \quad (20)$$

و

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]. \quad (21)$$

الشكل 6 يوضح اتساع الشعاع بناء على المعادلة (20). وكننتور الشعاع $w(z)$ له شكل قطع زائد وخطوطه تميل عن المحور بزواوية مقدراتها

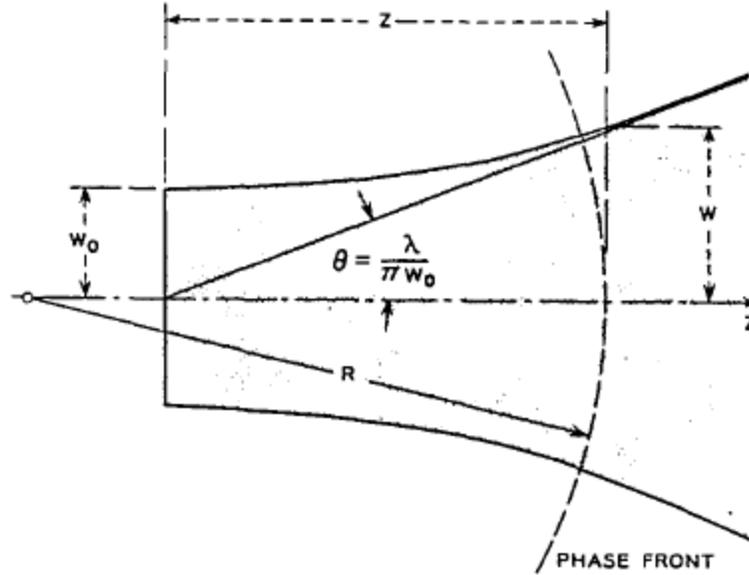
$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (22)$$

وهذا تعتبر زاوية حيود النمط الأساسي.

بقسمة المعادلة (21) على المعادلة (20)، نحصل على العلاقة المفيدة التالية:



$$\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} = \frac{\pi w^2}{\lambda R} \quad (23)$$



الشكل 6. خطوط كنتور أشعة جاوسيان.

والتي يمكن أن تستخدم للتعبير عن w_0 و z بدلالة w و R .

$$w_0^2 = w^2 / \left[1 + \left(\frac{\pi w^2}{\lambda R} \right)^2 \right] \quad (24)$$

$$z = R / \left[1 + \left(\frac{\lambda R}{\pi w^2} \right)^2 \right]. \quad (25)$$

ولحساب الإزاحة في الطور المركب بمسافة z بعيدا عن خصر الشعاع، من خلال إدخال المعادلة (19) في المعادلة (15) نحصل على



$$P' = -\frac{j}{q} = -\frac{j}{z + j(\pi w_0^2/\lambda)} \quad (26)$$

وبتكامل المعادلة (26) نحصل على النتيجة التالية:

$$\begin{aligned} jP(z) &= \ln[1 - j(\lambda z/\pi w_0^2)] \\ &= \ln\sqrt{1 + (\lambda z/\pi w_0^2)^2} - j \operatorname{arc} \tan(\lambda z/\pi w_0^2). \end{aligned} \quad (27)$$

الجزء الحقيقي لـ P يمثل فرق الإزاحة في الطور Φ بين الشعاع الجاوسيان والموجة المستوية، في حين إن الجزء التخيلي ينتج معامل السعة w_0/w والذي يعطي القيمة المتوقعة للشدة والتي تتناقص عند المحور نتيجة لاتساع الشعاع. ومع هذه النتائج لشعاع جاوسيان الأساسي، المعادلة (10) يمكن أن تكتب في الشكل التالي:

$$\begin{aligned} u(r, z) &= \frac{w_0}{w} \\ &\cdot \exp \left\{ -j(kz - \Phi) - r^2 \left(\frac{1}{w^2} + \frac{jk}{2R} \right) \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

حيث أن

$$\Phi = \operatorname{arc} \tan(\lambda z/\pi w_0^2). \quad (29)$$

وسوف نرى في الجزء 5.3 إن الأشعة الجاوسيان لهذا النوع ينتج بواسطة العديد من الليزرات، والتي تتذبذب في النمط الأساسي.



3.3 الأنماط ذات الرتب العالية Higher Order Modes

في الجزء السابق ناقشنا فقط حلا للمعادلة (11)، أي أن، شعاع ضوئي بخواص يكون فيها شكل الشدة في كل مقطع الشعاع معطى بنفس الدالة، والتي تعرف باسم دالة جاوسيان. واتساع التغيرات في توزيع جاوسيان هو انتشار الشعاع على امتداد محوره. وهناك حلول أخرى للمعادلة (11) بخواص مشابهة، وهي ما سوف نناقشه في هذا الجزء. هذه الحلول من الدوال الكاملة والمتعامدة والتي تعرف باسم أنماط الانتشار. وكل توزيع اختياري للضوء أحادي اللون يمكن أن يفسر بدلالة هذه الأنماط. لان قيود الفراغ لاشتقاق هذه الأنماط تسمح لنا فقط برسمها هنا.

(a) الأنماط في الإحداثيات الكارتيزية: لنظام يحتوي على هندسة كارتيزية (x,y,z) فانه يمكن أن نجد حل للمعادلة (11) في هذه الصورة:

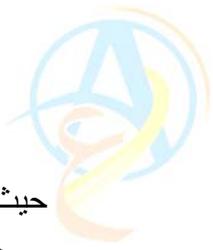
$$\psi = g\left(\frac{x}{w}\right) \cdot h\left(\frac{y}{w}\right) \cdot \exp\left\{-j\left[P + \frac{k}{2q}(x^2 + y^2)\right]\right\} \quad (30)$$

حيث إن g هي دالة في كل من x و z والدالة h هي دالة في y و z. وللجزء الحقيقي لـ g و h فان هذا يفترض نمط شعاع له شدة تقدر بناء على اتساع 2w(z) للشعاع الجاوسيان. وبعد إدخال هذا الجزء الحقيقي من الحل في المعادلة (11) فان ذلك يوصلنا إلى المعادلات التفاضلية لـ g و h بهذه الصورة

$$\frac{d^2 H_m}{dx^2} - 2x \frac{dH_m}{dx} + 2mH_m = 0. \quad (31)$$

هذه المعادلة التفاضلية لـ Hermite polynomial والتي يرمز لها بـ $H_m(x)$ من الرتبة m. والمعادلة (11) تحقق إذا كان

$$g \cdot h = H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{w}\right) H_n\left(\sqrt{2} \frac{y}{w}\right) \quad (32)$$



حيث m و n هي عدد الأنماط (المستعرضة). لاحظ إن نفس معامل القياس الشكل $w(z)$ يطبق على الأنماط من لكل الرتب.

وهذه بعض دوال Hermite polynomials ذات الرتب المنخفضة:

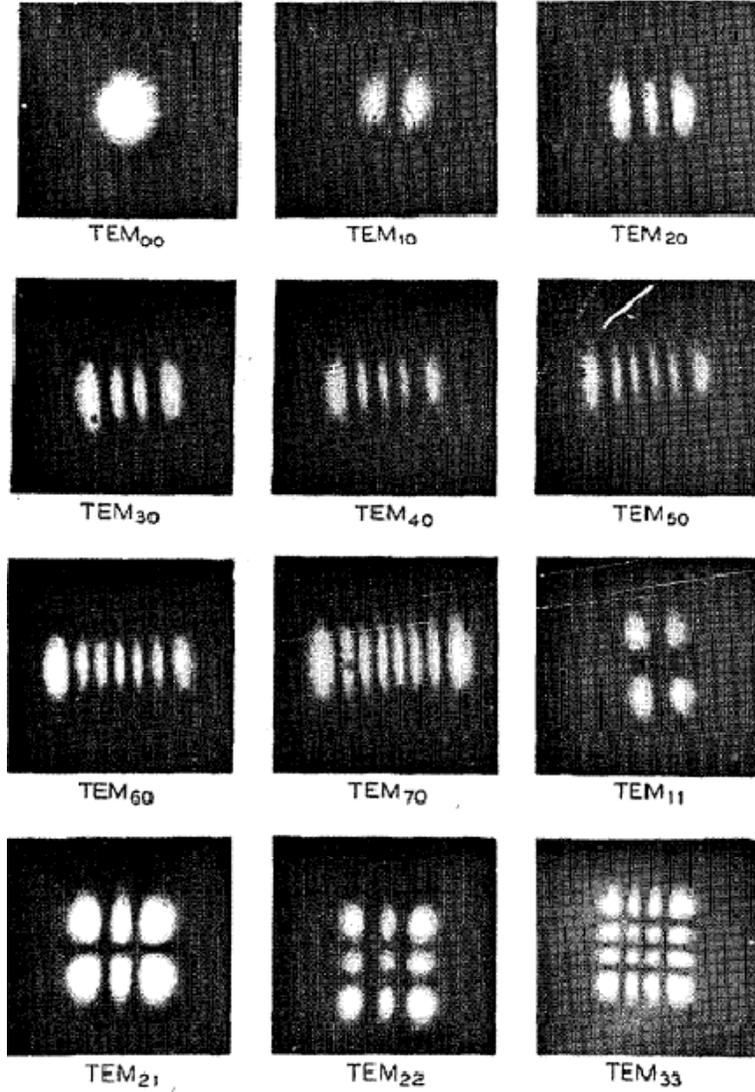
$$\begin{aligned}H_0(x) &= 1 \\H_1(x) &= x \\H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\H_3(x) &= 8x^3 - 12x.\end{aligned}\quad (33)$$

المعادلة (28) يمكن أن تستخدم كوصف رياضي للأشعة الضوئية ذات الرتب العالية، فإذا ما قمنا بإدخال حاصل الضرب g h كمعامل على الجانب الأيمن من المعادلة. فإن شكل شدة الأشعة عبر مساحة المقطع للشعاع ذو الرتبة العالية يكون بشكل يوصف بحاصل ضرب دالتي Hermite وجاوسيان.

الصور لمثل هذه الأنماط موضحة في الشكل 7. فهي تنتج كأنماط اهتزاز في مذبذب الليزر [16]. لاحظ إن عدد الأصفار في شكل النمط يساوي عدد النمط المقابل، والمساحة المشغولة بهذا النمط تزداد بزيادة رقم النمط.

المعامل $R(z)$ في المعادلة (28) هو نفسه لكل الأنماط، وهذا يدل على أن تحذب طول الجبهة هو نفسه وتحدث التغيرات بنفس الطريقة لكل الأنماط لكل الرتب. وإزاحة الطور Φ ، ولكنها دالة في عدد الأنماط. ونحصل على:

$$\Phi(m, n; z) = (m + n + 1) \arctan(\lambda z / \pi w_0^2). \quad (34)$$



الشكل 7. أشكال الأنماط في مذبذب ليزر غازي ذو تماثل متعامد.

وهذا يعني إن سرعة الطور تزداد بزيادة رقم النمط. وفي المذبذبات فان هذا يؤدي إلى وجود اختلافات في تردد المذبذب لأنماط الاهتزاز المختلفة.

(b) الأنماط في الإحداثيات الاسطوانية: لنظام بهندسة اسطوانية (r, Φ, z) فانه يمكن استخدام الحل التجريبي للمعادلة (11) والذي يكون في الصورة التالية:



$$\psi = g\left(\frac{r}{w}\right) \cdot \exp\left\{-j\left(P + \frac{k}{2q}r^2 + l\phi\right)\right\}. \quad (35)$$

وبعد إجراء بعض الحسابات فإننا نجد أن

$$g = \left(\sqrt{2} \frac{r}{w}\right)^l \cdot L_p^l\left(2 \frac{r^2}{w^2}\right) \quad (36)$$

حيث L_p^l عبارة عن دالة متعددة حدود Laguerre polynomial معممة، و P و I عبارة عن الأعداد الأنماط القطرية والزاوية. $L_p^l(x)$ تخضع للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x \frac{d^2 L_p^l}{dx^2} + (l+1-x) \frac{dL_p^l}{dx} + pL_p^l = 0. \quad (37)$$

بعض متعددات الحدود والتي من الرتب المنخفضة هي:

$$\begin{aligned} L_0^l(x) &= 1 \\ L_1^l(x) &= l+1-x \\ L_2^l(x) &= \frac{1}{2}(l+1)(l+2) - (l+2)x + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned} \quad (38)$$

وكما في حالة الأشعة بهندسة اسطوانية، فإن معاملات الأشعة $w(z)$ و $R(z)$ هي نفسها لكل الأنماط الاسطوانية. وإزاحة الطور، مرة أخرى، يعتمد على عدد الأنماط والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\Phi(p, l; z) = (2p + l + 1) \arctan(\lambda z / \pi w_0^2). \quad (39)$$



4.3 انتقال الأشعة بواسطة العدسة Beam Transformation by a Lens

تستخدم العدسة في تركيز شعاع الليزر في بقعة صغيرة، أو تستخدم لإنتاج شعاع بقطر مناسب وتحذب جبهة موجة لربط الشعاع بأي نظام بصري آخر. والعدسة المثالية لا تؤثر على توزيع شدة المجال المستعرض بما يعني أن الشعاع الجاوسيان الأساسي الداخل على العدسة تخرج من العدسة بنفس عدد الأنماط ونفس توزيع شدة المجال الجاوسيان. ولكن، العدسة تغير معاملات الشعاع $R(z)$ و $w(z)$. ويكون هاذين المعاملين هما نفسهما لكل الأنماط، فان المناقشة التالية تكون متحققة لكل الأنماط، وسوف ندرس هنا بشيء من التفصيل العلاقة بين المعاملين للشعاع الداخل (والذي سوف نشير له هنا بالمعامل 1) والمعاملين المقابلين للشعاع الخارج (بالمعامل 2)

اعتبر عدسة رقيقة ببعده بؤري f تقوم بتحويل الأشعة القادمة ذات الأمواج الكروية بنصف قطر R_1 مباشرة إلى يسار العدسة إلى أمواج كروية بنصف قطر R_2 على يمين العدسة، حيث أن

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} . \quad (40)$$

الشكل 8 يشرح هذه الحالة. اعتبر نصف قطر التحذب على انه موجبا، إذا كانت جبهة الموجة محدبة عند النظر إليها من $z=\infty$. العدسة تحول الطور الأمامي لأشعة الليزر بشكل مماثل تماما لنفس الطريقة للأمواج الكروية. وكما إن قطر الشعاع يكون على الجانب الأيسر مساويا لقطره على الجانب الأيمن للعدسة الرقيقة، فان المعامل q للأشعة القادمة والخارجة ترتبط بالعلاقة التالية:

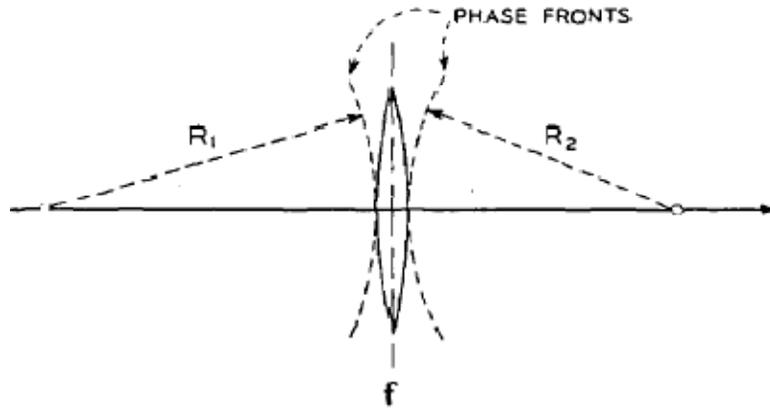
$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} , \quad (41)$$

حيث q 's تقاس عند العدسة. إذا كانت q_1 و q_2 مقاسة عند مسافات d_1 و d_2 من العدسة كما هو موضح في الشكل 9، فان العلاقة بينهما تصبح على النحو التالي:

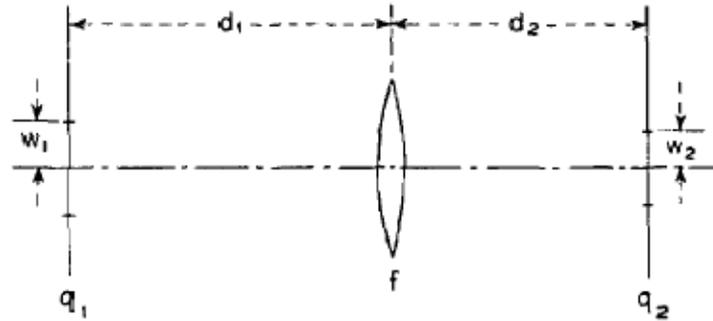
$$q_2 = \frac{(1 - d_2/f)q_1 + (d_1 + d_2 - d_1d_2/f)}{-(q_1/f) + (1 - d_1/f)} . \quad (42)$$



اشتقت المعادلة باستخدام (16) و (41). وهناك المزيد من التراكيب البصرية الأكثر تعقيدا، مثل عدسات الغاز، والعدسات المركبة، والعدسات السميكة، والتي يمكن أن نفكر بها كسلسلة مركبة من العدسات الرقيقة عند مسافات مختلفة. بإعادة استخدام المعادلتين (16) و (41)، فإننا نحصل على عدد كافي لحساب تأثير التراكيب المعقدة على انتشار أشعة الليزر. إذا كانت المصفوفة ABCD لانتقال الأشعة المحورية خلال التركيب البصري معروف، فإن معامل خروج الشعاع يمكن أن يحسب من المعادلة التالية:



الشكل 8. تحول جبهة الموجة في العدسة الرقيقة



الشكل 9. المسافة والمعاملات للشعاع المتحول بواسطة العدسة الرقيقة.

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (43)$$



هذه صورة عامة من المعادلة (42) والتي تعرف باسم قانون ABCD [10]. والمصفوفات للعديد من التراكيب البصرية موضحة في الجزء II. وقانون ABCD يتبع التناظر بين القوانين لأشعة الليزر والقوانين التي تخضع للأمواج الكروية في الهندسة البصرية. نصف القطر للأمواج الكروية R تخضع لقوانين لها نفس الشكل كما في المعادلة (16) والمعادلة (41) لمعامل الشعاع المركب q. ولمزيد من التفاصيل لهذا التناظر يوجد في المرجع [11].

5.3 مذبذبات الليزر (منفذ غير محدد) Laser Resonators (Infinite Aperture)

أكثر مذبذبات الليزر انتشارا هي تلك التي تتكون من مرآتين كرويتين (أو مستويتين) تقابلان بعضهما البعض. استقرار مثل هذه المذبذبات (المفتوحة) تمت مناقشته في الجزء 2 بدلالة الأشعة المحورية. ولدراسة أنماط مذبذبات الليزر فانه يجب الأخذ بعين الاعتبار طبيعتها الموجية، وهذا ما تم عمله هنا من خلال دراسة أشعة الموجة للنوع الذي تمت مناقشته أعلاه عندما تنتشر الأشعة ذهابا وإيابا بين المرآتين. كما وقد أهملنا تأثير حيود المنفذ خلال هذا الجزء، فان المناقشة الحالية تنطبق فقط على المذبذبات المستقرة بمرآة ذات منفذ كبير بالمقارنة مع بقعة الأشعة.

يعرف نمط المذبذب على انه ذو مجال له شكل ذاتي التناسق. وإذا كان النمط الاهتزازي يمكن تمثيله بواسطة الشعاع الموجي المنتشر ذهابا وإيابا بين المرآتين، فان معاملات الشعاع يجب أن تكون نفسها بعد رحلة كاملة للشعاع. هذا الشرط يستخدم لحساب معاملات النمط الاهتزازي. وكما إن الشعاع يمثل بنمط ينتقل في كلا الاتجاهين بين المرآتين فانه يكون أمواج موقوفة كما هو متوقع للنمط الاهتزازي للمذبذب.

مذبذب الليزر بمرآيا ذات تحدب متساوي موضح في الشكل 10 مع النظام المسطح المكافئ، للعدسات المتعاقبة. ولهذا التركيب المتماثل يكون كافيا إن نفترض شكل ذات التناسق لانتقال واحد في المذبذب (والتي تكافئ دورة كاملة لتعاقب العدسات)، بدلا من الرحلة الكاملة. وإذا كان معامل الشعاع المركب q_1 ، مباشرة على يمين عدسة معينة، و q_2 مباشرة على يمين العدسة التي تليها، يحسب بواسطة المعادلتين (16) و (41) على النحو التالي:



$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1 + d} - \frac{1}{f}. \quad (44)$$

التناسق الذاتي يتطلب أن $q_1 = q_2 = q$ ، والذي يؤدي إلى معادلة تربيعية لمعامل الشعاع q عند العدسات (أو عند مرايا المذبذب):

$$\frac{1}{q^2} + \frac{1}{fq} + \frac{1}{fd} = 0. \quad (45)$$

الجذور لهذه المعادلة تكون على النحو التالي:

$$\frac{1}{q} = -\frac{1}{2f} (\mp) j \sqrt{\frac{1}{fd} - \frac{1}{4f^2}} \quad (46)$$

حيث إن الجذر ينتج اتساع حقيقي للشعاع. (لاحظ أنه يمكن الحصول على اتساع حقيقي للشعاع للمذبذبات المستقرة فقط).

من المعادلة (46) يمكن الحصول مباشرة على المعاملات الحقيقية للشعاع والمعرفة في المعادلة (17). ويمكن أن نرى إن R تساوي نصف قطر التحذب للمرايا، والتي تعني أن أسطح المرايا متمركزة مع جبهات الطور لأنماط المذبذب. والاتساع $2w$ للنمط الأساسي يعطى بالمعادلة التالية:

$$w^2 = \left(\frac{\lambda R}{\pi}\right) / \sqrt{2 \frac{R}{d} - 1}. \quad (47)$$

لحساب نصف قطر الشعاع w_0 في مركز المذبذب حيث يكون طور جبهة الموجة مستوي، فإن يمكن استخدام المعادلة (23) مع التعويض عن $z=d/2$ ونحصل على

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{d(2R - d)}. \quad (48)$$



معاملات الشعاع R و w تصف أنماط جميع الرتب. ولكن سرعات الطور مختلفة للرتب المختلفة، ولذلك فإن شروط المذبذب تعتمد على عدد الأنماط. ويحدث الرنين عندما يكون إزاحة الطور من مرآة إلى مرآة أخرى عبارة عن مضاعفات π .

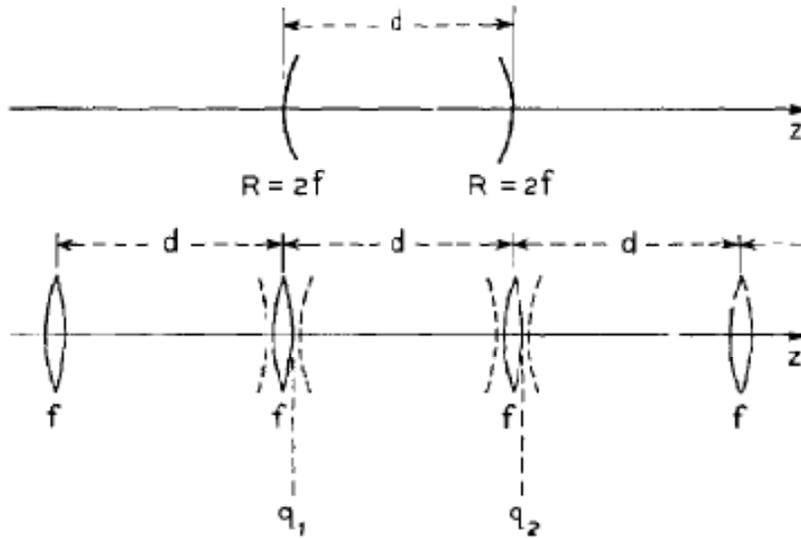
باستخدام المعادلتين (28) و (34) يمكن كتابة هذا الشرط على النحو التالي:

$$kd - 2(m + n + 1) \arctan(\lambda d / 2\pi w_0^2) = \pi(q + 1) \quad (49)$$

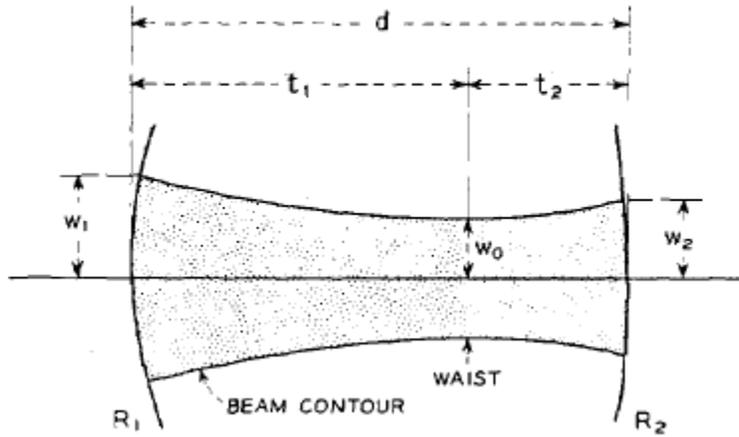
حيث q تمثل عدد العقد في الموجة الموقوفة المحورية (و عدد أنصاف الموجات يكون $q+1$) يجب الانتباه هنا إلى أن الرمز q هنا يشير إلى عدد الأنماط وليس معامل الشعاع المركب). و m و n عبارة عن أعداد الأنماط المستعرضة والتي عرفت في الجزء 3.3. والأنماط الخاصة بالشكل الهندسي الدائري لها نفس الشرط حيث $(w_p + l + 1)$ تستبدل $(m + n + 1)$.

تردد النبضة الأساسية ν_0 أي التردد الفاصل بين نمطين اهتزازيين متعاقبين طوليين يعطى بالمعادلة التالية:

$$\nu_0 = c/2d \quad (50)$$



الشكل 10. مذبذب ليزر متمائل والعدسات المتعاقبة المكافئة. موضح معاملات الشعاع q_1 و q_2 .



الشكل 11. معامل النمط الاهتزازي للمذبذب ذو مرآيا غير متساوية التحذب.

حيث c تمثل سرعة الضوء. وبعد إجراء بعض الحسابات الجبرية يمكن الحصول من المعادلة (49) على الشكل التالي للتردد الرنيني للنمط الاهتزازي:

$$\nu/\nu_0 = (q+1) + \frac{1}{\pi} (m+n+1) \arccos(1-d/R). \quad (51)$$

حالة خاص وهي عندما يكون المذبذب بؤري ($d=r=b$)، فإن المعادلات أعلاه تصبح

$$w^2 = \lambda b/\pi, \quad w_0^2 = \lambda b/2\pi;$$

$$\nu/\nu_0 = (q+1) + \frac{1}{2}(m+n+1). \quad (52)$$

المعامل b يعرف على انه المعامل البؤري.

المذبذبات التي تكون فيها المرآيا غير متساوية التحذب يمكن أن نتعامل معها بنفس الطريقة. والشكل الهندسي لمثل هذه المذبذبات بحيث يكون نصف قطر تحذب المرآيا هو R_1 و R_2 موضحا في الشكل 11. وقطر الشعاع عند مرآيا المذبذب المستقر هو، $2w_1$ و $2w_2$ يعطى بالعلاقة التالية:



$$w_1^4 = (\lambda R_1/\pi)^2 \frac{R_2 - d}{R_1 - d} \frac{d}{R_1 + R_2 - d}$$
$$w_2^4 = (\lambda R_2/\pi)^2 \frac{R_1 - d}{R_2 - d} \frac{d}{R_1 + R_2 - d} \cdot \quad (53)$$

قطر الشعاع عند الخصر $2w_0$ ، والذي يتكون إما في الجزء الداخلي أو الخارجي للمذبذب، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)^2} \cdot \quad (54)$$

المسافات t_1 و t_2 بين خصر الشعاع والمرآيا، له قياس موجبا كما تبين في الشكل، يكون

$$t_1 = \frac{d(R_2 - d)}{R_1 + R_2 - 2d}$$
$$t_2 = \frac{d(R_1 - d)}{R_1 + R_2 - 2d} \cdot \quad (55)$$

وشرط الرنين هو

$$\nu/\nu_0 = (q + 1) + \frac{1}{\pi} (m + n + 1) \arccos \sqrt{(1 - d/R_1)(1 - d/R_2)} \quad (56)$$

حيث أن الجذر التربيعي يجب أن يعطي إشارة $(1-d/R_1)$ ، والتي تساوي إشارة $(1-d/R_2)$ للمذبذب المستقر. هناك العديد من تراكيب المذبذبات المعقدة أكثر من تلك التي قمنا بمناقشتها أعلاه. وبالأخص عندما نقوم بإدخال عدسة أو مجموعة من العدسات بين المرآيا. ولكن في كل حالة، فإن المذبذب المفتوح يكافئ التابع الدوري للأنظمة البصرية المتماثلة الموضحة في الشكل 2. وعناصر المصفوفة ABCD لهذا النظام يمكن



أن تستخدم لحساب معاملات النمط للمذبذب. وباستخدام قانون ABCD (43) والفرضية المتعلقة بالتناسق الذاتي عن طريق استخدام $q_1=q_2=1$. فان الجذور للمعادلة التربيعية هي على النحو التالي:

$$\frac{1}{q} = \frac{D - A}{2B} (+) \frac{j}{2B} \sqrt{4 - (A + D)^2}, \quad (57)$$

والذي ينتج نصف قطر الشعاع المناظر w على النحو التالي:

$$w^2 = (2\lambda B/\pi)/\sqrt{4 - (A + D)^2}. \quad (58)$$

6.3 تطابق الأنماط الاهتزازية Mode Matching

لقد بينا فيما سبق إن الأنماط الاهتزازية لمذبذبات الليزر يمكن أن تحدد بواسطة الأشعة الضوئية بخصائص محددة ومعاملات يمكن أن تحدد بواسطة الشكل الهندسي للمذبذب. هذه الأشعة عادة يتم إدخالها في التراكيب البصرية الأخرى مع مجموعة جديدة من معاملات الأشعة. هذه التراكيب البصرية يفترض أن لها أشكال فيزيائية مختلفة، مثل المذبذبات المستخدمة في أجهزة تداخل فابري بيروت أو المكبرات المتجددة، والمواد العازلة المتعاقبة أو العدسات الغازية المستخدمة في خطوط النقل البصري، أو البلورات ذات المواد العازلة الغير خطية المستخدمة في التجارب البصرية البارامترية. ولمطابقة هذه الأنماط مع التركيب البصري المحدد فانه يجب ان نستخدم تحويل شعاع جاوسيان (أو الأنماط ذات الرتب العالية) إلى شعاع آخر بخواص معروفة مسبقا. التحويل عادة يتم بواسطة عدسة رقيقة، ولكن أنظمة بصرية أكثر تعقيدا يمكن أن تستخدم. وبالرغم من إن المناقشة الحالية تستند إلى حالة بسيطة تتكون من عدسة رقيقة، إلا انه يمكن تطبيقها على الأنظمة الأكثر تعقيدا، على أن يتم قياس المسافة بين المستويات الأساسية واستخدام البعد البؤري الموحد لأكثر الأنظمة تعقيدا.



يمكن حساب كلا من موقع خصر شعاعين متحولين بعضهما البعض و قطر الشعاع عند الخصر. ولمطابقة الأشعة يجب أن نختار عدسة ببعده بؤري f اكبر من البعد المميز f_0 والمحدد لكل من الشعاعين، ويجب أن يتم ضبط المسافات بين العدسة و خصر الشعاع بناء على القاعدة التي سوف نشتقها فيما يلي:

في الشكل 9 نجد خصري شعاعين يفترض أنهما موجودين عند المسافتين d_1 و d_2 من العدسة. ومعاملات الشعاع المركب عند خصري الشعاع هي تخيلية بالكامل، وتكون على النحو التالي:

$$q_1 = j\pi w_1^2/\lambda, \quad q_2 = j\pi w_2^2/\lambda \quad (59)$$

حيث إن $2w_1$ و $2w_2$ عبارة عن قطري الشعاعين عن خصريهما. وإذا أردنا أن ندخل المعادلة (59) لـ q_1 و q_2 في المعادلة (42) ونساوي الأطراف التخيلية، فإننا نحصل على:

$$\frac{d_1 - f}{d_2 - f} = \frac{w_1^2}{w_2^2} . \quad (60)$$

وبمساواة الأطراف الحقيقية ينتج لنا

$$(d_1 - f)(d_2 - f) = f^2 - f_0^2 \quad (61)$$

حيث

$$f_0 = \pi w_1 w_2 / \lambda. \quad (62)$$

لاحظ إن الطول المميز f_0 يعرف بواسطة قطر خصر الشعاع الذي يتوافق معه. فيما عدا الحد f_0^2 ، والذي يؤول إلى الصفر للأطوال الموجية المتناهية في الصغر، المعادلة (61) تشبه معادلة نيوتن في الهندسة البصرية.

لأي عدسة ببعده بؤري $f > f_0$ يمكن ان تستخدم لانجاز التحويل المماثل. وعندما يتم اختيار f ، فان المسافة d_1 ، و d_2 يجب ان تضبطا لتحقيق معادلة التطابق [10].



$$\begin{aligned}d_1 &= f \pm \frac{w_1}{w_2} \sqrt{f^2 - f_0^2}, \\d_2 &= f \pm \frac{w_2}{w_1} \sqrt{f^2 - f_0^2}.\end{aligned}\quad (63)$$

هذه العلاقات تم اشتقاقها بدمج كلا من المعادلتين (60) و (61). في المعادلة (63) يمكن اختيار احدهما أو كلاهما موجب الإشارة أو كلاهما سالب الإشارة للتطابق.

وفي الأغلب يكون مفيدا أن ندخل المعامل البؤري b_1 و b_2 في معادلات التطابق. وهما معرفان بقطر الخصر للنظامين الذين من المفترض أن يتطابقا.

$$b_1 = 2\pi w_1^2/\lambda, \quad b_2 = 2\pi w_2^2/\lambda. \quad (64)$$

باستخدام هذه المعاملات يمكن الحصول على الطول المميز f_0

$$f_0^2 = \frac{1}{4}b_1b_2, \quad (65)$$

ومسافات التطابق تكون على النحو التالي:

$$\begin{aligned}d_1 &= f \pm \frac{1}{2}b_1 \sqrt{(f^2/f_0^2) - 1}, \\d_2 &= f \pm \frac{1}{2}b_2 \sqrt{(f^2/f_0^2) - 1}.\end{aligned}\quad (66)$$

لاحظ ان هذا الشكل لمعادلات التطابق، لا يظهر فيه الطول الموجي بشكل واضح.

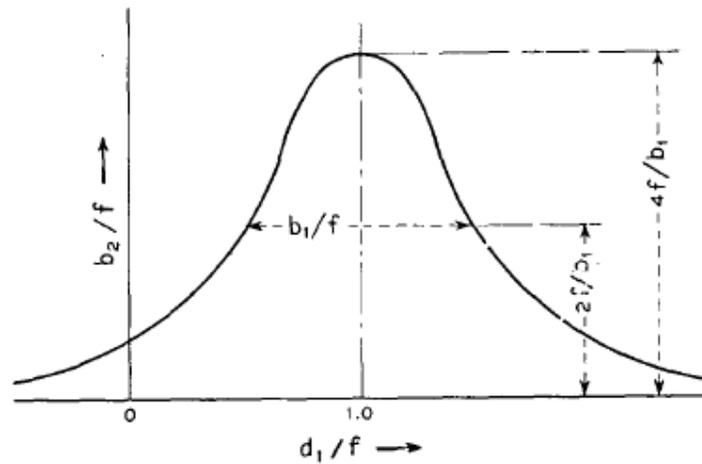
الجدول II يوضح قائمة، كمرجع سريع، للمعادلات لأهم معاملين للشعاع الذي يدخل من العديد من التراكيب البصرية المستخدمة بكثرة. وهي المعامل البؤري b والمسافة l والتي تحدد موقع الخصر للشعاع الناتج. النظام 1 لمذبذب يتكون من مرآة مستوية ومرآة كروية بنصف قطر R . والنظام رقم 2 لمذبذب يتكون من مرآتين كرويتين متماثلتين. والنظام رقم 3 لمذبذب يتكون من مرآيا مختلفة في التحذب. والنظام 4 يتكون من



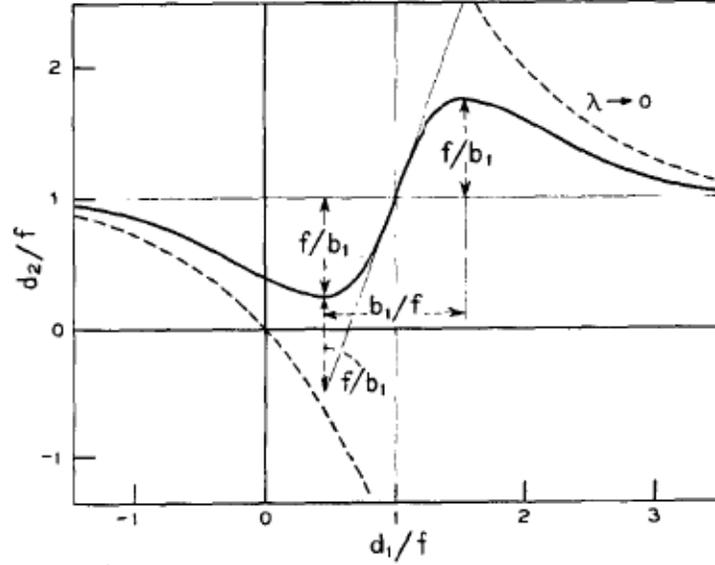
الجدول II

معادلات المعامل البؤري وموقع خصر الشعاع للعديد من التراكيب البصرية

NO	OPTICAL SYSTEM	$\frac{1}{2} b = \pi w_0^2 / \lambda$	t
1		$\sqrt{d(R-d)}$	-
2		$\frac{1}{2} \sqrt{d(2R-d)}$	$\frac{1}{2} d$
3		$\frac{\sqrt{d(R_1-d)(R_2-d)(R_1+R_2-d)}}{R_1+R_2-2d}$	$\frac{d(R_2-d)}{R_1+R_2-2d}$
4		$\frac{R \sqrt{d(2R-d)}}{2R+d(n^2-1)}$	$\frac{ndR}{2R+d(n^2-1)}$
5		$\frac{1}{2} \sqrt{d(4f-d)}$	$\frac{1}{2} d$
6		$\frac{1}{2} d$	$\frac{1}{2} d$
7		$\frac{d}{2n}$	$\frac{d}{2n}$
a		$\frac{nR \sqrt{d(2R-d)}}{2n^2R-d(n^2-1)}$	$\frac{dR}{2n^2R-d(n^2-1)}$



الشكل 12. المعامل البؤري b_2 كدالة في المسافة الفاصلة بين العدسة وخصر الشعاع d_1



الشكل 13. المسافة d_2 لخصر الشعاع كدالة في المسافة الفاصلة بين العدسة وخصر الشعاع d_1

هي عبارة عن مذبذب يتكون من مرتين كرويتين متماثلتين، ولكن الأسطح العاكسة تم ترسيبها على أسطح مستوية مقعرة بمعامل انكسار n . وتعمل هذه الأسطح كعدسات سالبة وتغير من خصائص الشعاع الناتج منها. تأثير العدسة هذا يفترض انه غير موجود في الأنظمة رقم 2 و 3. النظام رقم 5 هو عبارة عن عدسات رقيقة متعاقبة لها بعد بؤري f متساوي. والنظام رقم 6 هو نظام مكون من فتحات متساوية تشبه القرحة تبعد عن بعضها البعض مسافة d . موضح معاملات الشعاع إلي يمر عبر فتحتين بأقل قطر ممكن للشعاع. هذا الشعاع والذي يكون متحد البؤرة على مسافة d . كما إن الشعاع سوف يمر أيضا من خلال أنبوبة طولها d ذات وضوح مثالي. (الأنبوبة أيضا موضحة في الشكل). حالة مشابهة موضحة في النظام 7، والذي يتوافق مع الشعاع متحد البؤرة على مسافة d للمادة البصرية ذات معامل الانكسار n . النظام رقم 8 عبارة عن مذبذب بمرايا كروية مملوء بمادة معامل انكسارها n ، أو بمادة بصرية لها سطح منحنى عند نهايتها حيث أن الشعاع يعبر خلالها يكون له طور متطابق مع هذه الأسطح.

عندما يتم تصميم نظام مكافئ، فانه من المفيد أن نعرف الدقة المطلوبة لضبط المسافات. والمناقشة التالية توضح كيف المعاملات b_2 و d_2 تتغير عندما تكون b_1 و f ثابتان والمسافة الفاصلة بين العدسة d_1 وخصر الشعاع الداخل متغيرة. المعادلتين (60) و (61) يمكن أن تحل لـ b_2 ونحصل على النتيجة التالية: [9]



$$b_2/f = \frac{b_1/f}{(1 - d_1/f)^2 + (b_1/2f)^2} \quad (67)$$

هذا يعني إن المعامل b_2 للشعاع النافذ من العدسة يتغير مع d طبقا لدالة لورانترزيان كما هو مبين في الشكل 12. ويتمركز اللورانترزيان عند $d_1=f$ وله اتساع يساوي b_1 . القيمة العظمى لـ b_2 هي $4f^2/b_1$.

وإذا ما قمنا بإدخال المعادلة (67) في المعادلة (60) نحصل على المعادلة التالية:

$$1 - d_2/f = \frac{1 - d_1/f}{(1 - d_1/f)^2 + (b_1/2f)^2} \quad (68)$$

والتي تبين أن التغير في d_2 مع d_1 . التغير يشير إلى منحنى التشتت المصاحب له دالة لورانترزيان كما هو موضح في الشكل 13. والقيمة العظمى للمنحنى تحدث عند نقاط نصف قيمة الطاقة على دالة لورانترزيان. وميل المنحنى عند $d_1=f$ يكون $(2f/b_1)^2$. المنحنى ذو الخطوط المتقطعة على الشكل يقابل في علم الهندسة البصرية العلاقة بين d_1 و d_2 و f [20].



7.3 المخططات الدائرية Circle Diagrams

انتشار أشعة الليزر الجاوسيان يمكن أن تمثل بشكل تخطيطي على مخططات دائرية. على مثل هذه المخططات يمكن أن نتبع الشعاع كما ينتشر في الفراغ أو يمر عبر العدسات، وهذا يوفر حل رسومي لمشكلة تكافؤ الأنماط. المخططات الدائرية للشعاع تشبه مخططات المعاوقة، مثل مخطط سميث. وفي الواقع هناك تشابه جزئي بين مشكلة خطوط النقل وأشعة الليزر، وكذلك يوجد تشابه مع الشبكات الكهربائية لكل نظام بصري [17].

أول مخطط دائري للأشعة تم عرضه بواسطة Collins [18]. والمخطط المزوج تم مناقشته في [19]. الأساس للاشتقاق لهذه المخططات هو قوانين انتشار الشعاع الذي تمت مناقشته في الجزء 2.3. بدمج المعادلتين (17) و (19) وحذف q نحصل على المعادلة التالية:

$$\left(\frac{\lambda}{\pi w^2} + j \frac{1}{R}\right) \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda} - jz\right) = 1. \quad (69)$$

العلاقة تحتوي على أربعة كميات هي w ، R ، w_0 ، و z والتي تستخدم لوصف انتشار أشعة جاوسيان في الجزء 2.3. وكل زوج من هذه الكميات يمكن أن يعرف بمتغيرات مركبة Z و W :

$$W = \frac{\lambda}{\pi w^2} + j \frac{1}{R}$$
$$Z = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} - jz = b/2 - jz, \quad (70)$$

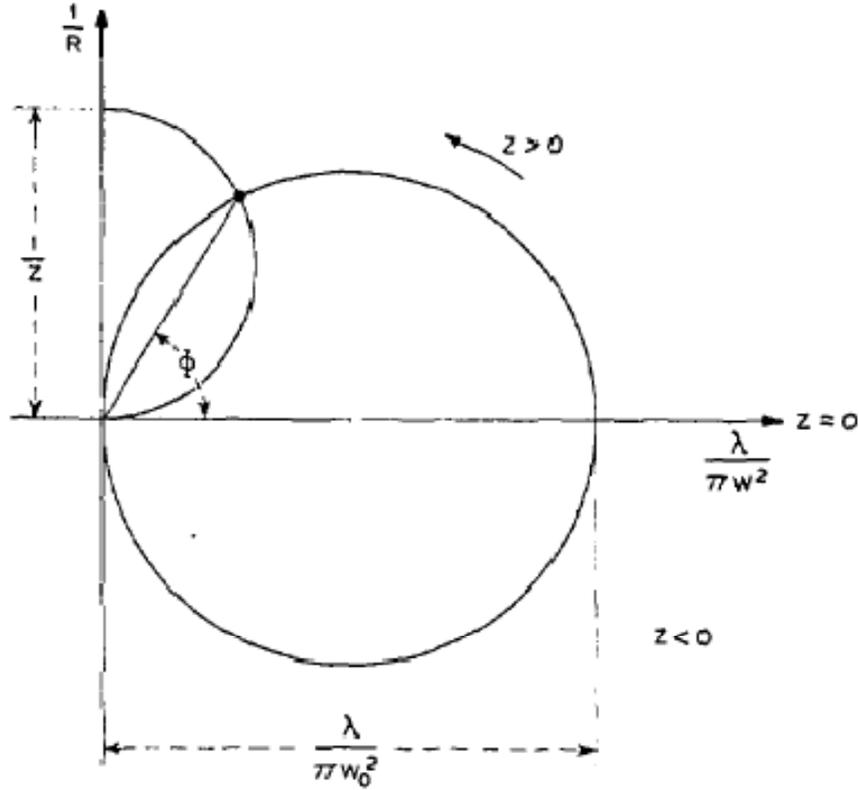
حيث b هي المعامل البؤري للشعاع. ولهذه المتغيرات في المعادلة (69) نعرف التحول البؤري على أنه

$$W = 1/Z. \quad (71)$$

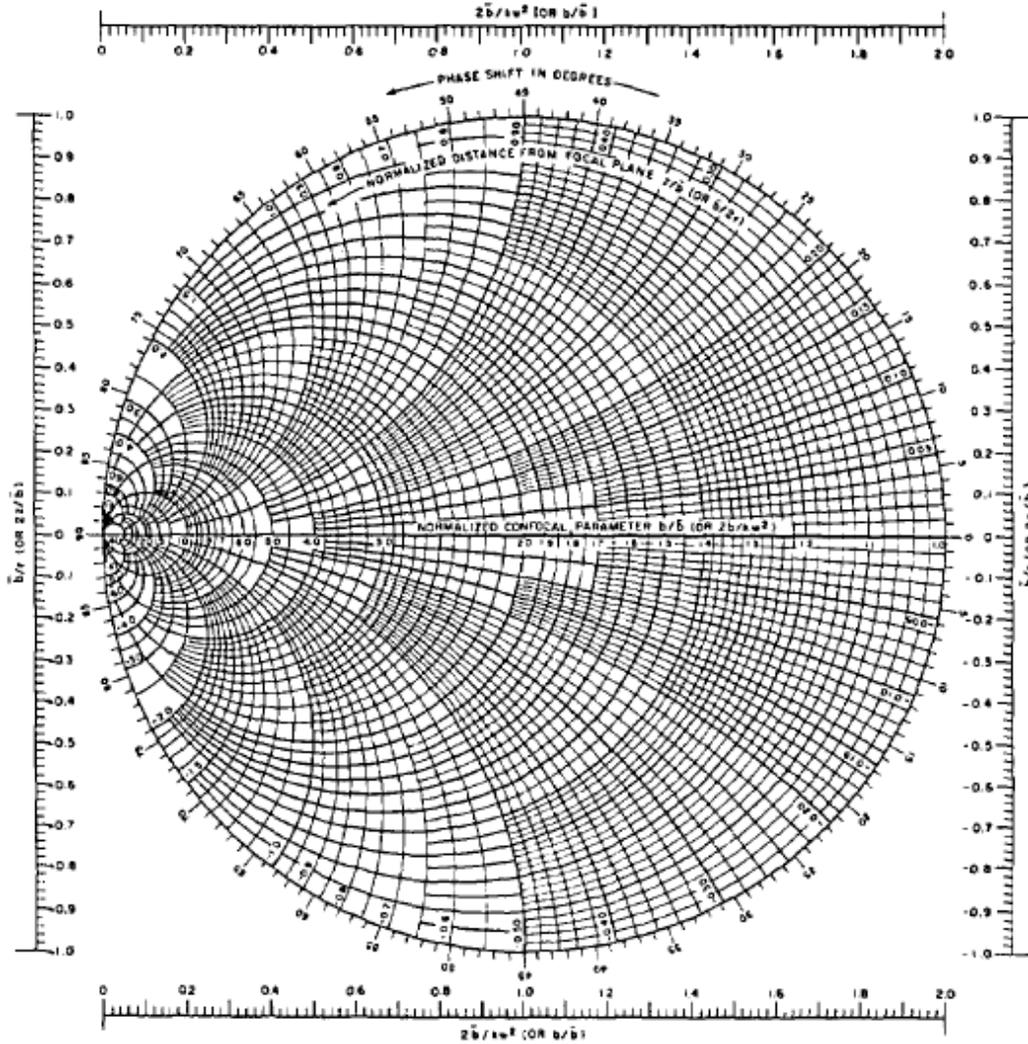
المخططين الدائريين المزوجين يرسمان في المستويات المركبة لكل من W و Z على التوالي. مخطط المستوى W [18] موضح في الشكل 14 حيث أن المتغيرات $\lambda/\pi w^2$ و $1/R$ ترسم على شكل محاور. في هذا المستوى فإن الخطوط التي لها $b/2 = \pi w_0^2/\lambda$ ثابتة والخطوط التي لها z ثابتة للمستوى Z تظهر في



شكل دوائر خلال نقطة الأصل. والشعاع الموضح بالدائرة التي لها b ثابتة، ومعاملات الشعاع w و R عند مسافة z من خصر الشعاع يمكن بسهولة أن تقرأ في المخطط.



الشكل 14 الشكل الهندسي لمخطط الدائرة للمستوى W



الشكل 15 مخطط الشعاع الجاوسيان. كلا من المخطط الدائري للمستويين W و Z متحdan مع بعضهما البعض

عندما يمر الشعاع خلال العدسة يتغير طور جبهة الموجة بناء على المعادلة (40) ويتكون شعاع جديد، والذي يشير إلى أن الشعاع القادم والشعاع الخارج مرتبطين بواسطة المخطط من خلال الخط الرأسي للطول $1/f$. والزاوية Φ الموضحة في الشكل والتي تساوي إزاحة الطور الناتج عن الشعاع كما هو معطى في المعادلة (29)، وهذا يمكن إثباته بسهولة باستخدام المعادلة (23).

المخطط المزدوج [19] مرسوم في المستوى Z . مجموعة الدوائر في كلا المخططين لهما نفس الشكل، و فقط تسمية المحاور والدوائر هي المختلفة. في الشكل 15 كلا المخططين متحدين في مخطط واحد. المسميات داخل الأقواس تقابل مخطط المستوى Z ، ومعامل التسوية والذي هو اختياري.



ويمكن رسم العديد من مخططات الدوائر الأخرى والتي ترتبط مع الانتقالات البؤرية المذكورة أعلاه. وهذه الانتقالات تجعل من الممكن استخدام مخطط سميث لتحديد معامل عدم التوافق المركب لأشعة جاوسيان [20]. ومخططات دائرية أخرى تشمل تلك المتعلقة بالمذبذبات البصرية [21] والتي تسمح بتحديد بعض المعاملات لأنماط المذبذب بشكل بياني.

4. مذبذبات الليزر (منفذ محدود) (LASER RESONATORS (FINITE APERTURE))

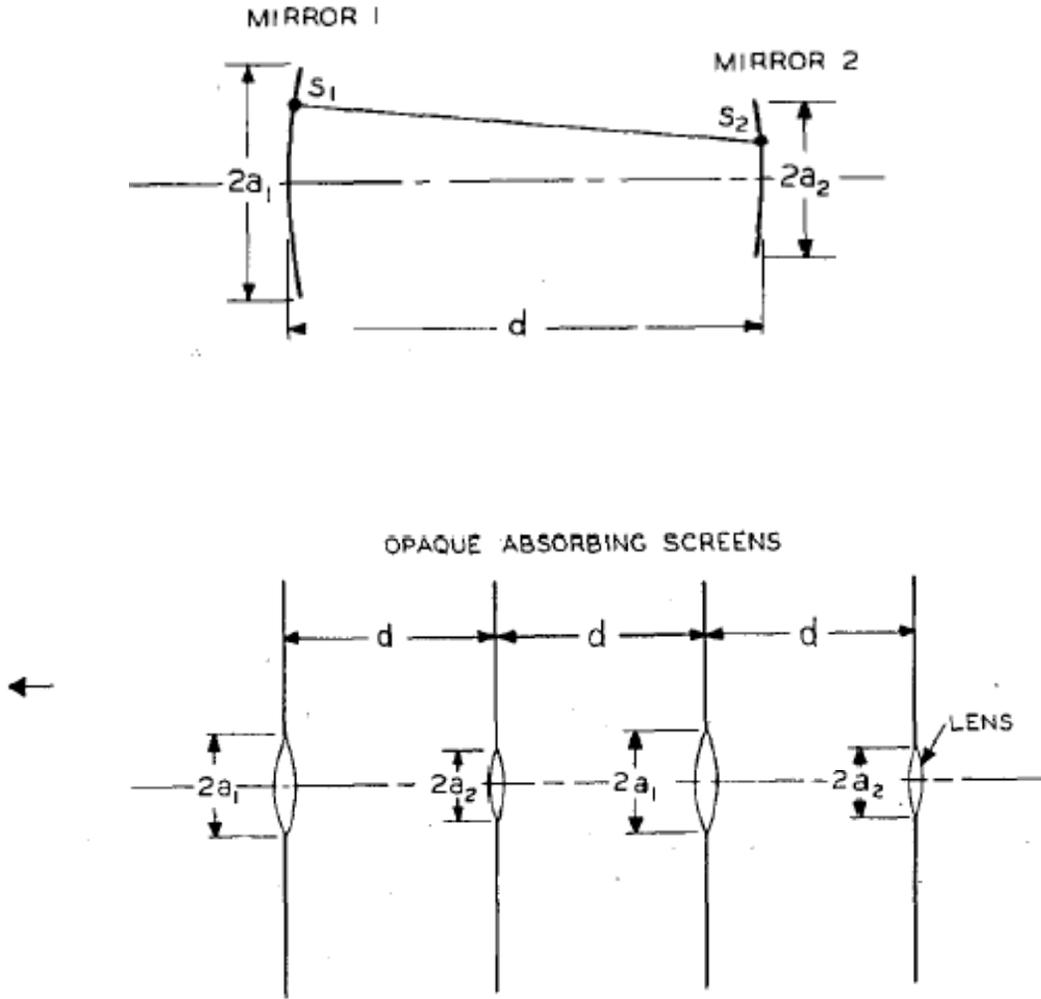
1.4 الصيغة الرياضية العامة General Mathematical Formulation

في هذا الجزء سوف نركز على تأثير الحيود للمنفذ ذو الحجم المحدود للمرايا، هذا التأثير قد تم إهماله في الأجزاء السابقة. كما انه قد ذكر أن المذبذبات المستخدمة في الليزر تأخذ في العادة شكل التركيب المفتوح الذي يحتوي على زوج من المرايا التي تقابل بعضها البعض. مثل هذا التركيب ذو المرايا محدودة المنفذ تفقد طاقة ما لم يتم تعويض الطاقة بشكل مستمر، والمجال الكهرومغناطيسي فيها يضمحل. في مثل هذه الحالة فان نمط المذبذب يضمحل مجاله ببطء [4]. في مذبذب الليزر فان مادة الليزر تعمل على تزويد الطاقة للتغلب على الفقد بحيث يصل النظام إلى حالة الاستقرار. ولكن، لان تشعب الحصييلة الغير خطي في الوسط سوف يظهر حصييلة اقل في المناطق التي يكون فيها المجال أعلى من تلك التي يكون فيها المجال منخفض، والأنماط الاهتزازية للمذبذب الفعال يتوقع ان تكون مختلفة بعض الشيء من تلك الأنماط المضمحلة في المذبذب الغير فعال. المشكلة في المذبذب الفعال المملوء بمادة مشبعة قد حلت حديثا في [22]، و [23] والنتائج المحسوبة تبين أن الحصييلة غير كبيرة فان أنماط المذبذب غير مضطربة تحت تأثير التشعب. وهذا العمل أيضا قد تم تطبيقه على المذبذب الغير فعال للحصول على وصف للأنماط الفعالة في مذبذبات الليزر.

المشكلة في المذبذب المفتوح صعبة وحلها معقد ولازال البحث عن الحل جاري. ولكن إذا تم وضع بعض الافتراضات لتبسيط المشكلة، فان المشكلة تصبح قابلة للحل وسنحصل على نتائج لها معنى فيزيائي مفيد. وهذه الافتراضات التي تجعل المشكلة ايسر في التعامل معها هي افتراض إن هناك طبيعة شبه بصرية وبالتحديد هناك يوجد (1) أبعاد المذبذب كبيرة بالمقارنة مع الطول الموجي، (2) المجال في المذبذب هو مجال كهرومغناطيسي مستعرض (TEM). وطالما إن هذه الافتراضات متحققة، فان صيغة كيرشوف-فرنيل



لمبدأ هيوغن يمكن أن تستحضر للحصول على زوج من المعادلات التكاملية والتي تربط المجالات الكهرومغناطيسية للمرآتين المتقابلتين. بالإضافة إلى ذلك إذا كانت المسافة الفاصلة بين المرآتين كبيرة بالمقارنة مع أبعاد المرآة وإذا كانت المرآيا منحنية بشكل بسيط، فان مركبتين متعامدتين كارتيزيتين لمتجه المجال تكونا غير مقترنتين، بحيث يمكن كتابة معادلات قياسية منفصلة لكل مركبة. الحلول لهذه المعادلات القياسية تنتج أنماط المذبذب والتي تكون مستقيمة ومنتظمة في اتجاه واحد. كما إن أشكال أخرى من الاستقطاب يمكن ان نحصل عليها من الأنماط المستقيمة المنتظمة بواسطة التراكب الخطي.



الشكل 16. الشكل الهندسي للمذبذب ذو المرآيا الكروية بمرآيا محدودة المنفذ والعدسات المتعاقبة المكافئة في مجموعة من الشاشات المعتمة



عند اشتقاق المعادلات التكاملية، فإنه قد افترض أن الأمواج المستعرضة TEM المنتقلة تنعكس للأمام والخلف بين المرآتين. والمذبذب في هذه الحالة يشابه وسط النقل الذي يحتوي على مجموعة من المنافذ أو العدسات في شاشات معتمة (انظر الشكل 16). المجالات عند المرآتين ترتبط بواسطة المعادلات التالية [24].

$$\begin{aligned}\gamma^{(1)}E^{(1)}(s_1) &= \int_{S_2} K^{(2)}(s_1, s_2)E^{(2)}(s_2)dS_2 \\ \gamma^{(2)}E^{(2)}(s_2) &= \int_{S_1} K^{(1)}(s_2, s_1)E^{(1)}(s_1)dS_1\end{aligned}\quad (72)$$

حيث أن التكاملات تؤخذ على أسطح المرايا S_1 و S_2 على التوالي. في المعادلات أعلاه فإن الرمز السفلي والرمز العلوي 1 و 2 يشيران إلى المرآة 1 و المرآة 2، كلا من s_1 و s_2 عبارة عن رموز للإحداثيات المستعرضة على سطح المرآة، على سبيل المثال $s_1=(x_1, y_1)$ و $s_2=(x_2, y_2)$ أو $s_1=(r_1, \Phi_1)$ و $s_2=(r_2, \Phi_2)$ ، $E^{(1)}$ و $E^{(2)}$ هما دالتي توزيع المجال على المرايا، $\gamma^{(1)}$ و $\gamma^{(2)}$ تعطي مقدار التخفيف والإزاحة في الطور الناتجين عن انتقال الأشعة من مرآة إلى أخرى. وكلا من الكرنيل $K^{(1)}$ و $K^{(2)}$ عبارة عن دوال المسافة بين s_1 و s_2 ولهذا يعتمدان على الشكل الهندسي للمرايا، حيث إنهما متساويان $[K^{(1)}(s_2, s_1) = K^{(2)}(s_1, s_2)]$ ولكن بصفة عامة، فإنهما غير متماثلين $[K^{(1)}(s_2, s_1) \neq K^{(1)}(s_1, s_2)]$ ، $[K^{(2)}(s_2, s_1) \neq K^{(2)}(s_1, s_2)]$.

المعادلات التكاملية الموضحة في (72) تعبر عن المجال لكل مرآة بدلالة المجال المنعكس عند المرآة الأخرى، وهذا يعني إنها معادلات انتقال واحد. وبالتعويض بوحدة في الأخرى، نحصل على الانتقال المزدوج أي معادلات الدورة الكاملة، والتي تنص على إن المجال عند كل مرآة يجب أن ينتج الأخرى بعد دورة كاملة. لان الكرنيل لكل مرآة عبارة عن معادلات انتقال مزدوجة وهي معادلات متماثلة [24]، ويتبع هذا [25] إن دوال توزيع المجال المشابهة لرتب الأنماط المختلفة تكون متعامدة على أسطح المرايا، أي أن

$$\begin{aligned}\int_{S_1} E_m^{(1)}(s_1)E_n^{(1)}(s_1)dS_1 &= 0, \quad m \neq n \\ \int_{S_2} E_m^{(2)}(s_2)E_n^{(2)}(s_2)dS_2 &= 0, \quad m \neq n\end{aligned}\quad (73)$$



حيث m و n تشيران إلى رتب الأنماط المختلفة. ومن المهم ملاحظة أن العلاقة التعامدية هي غير Hermitian وهي الوحيدة الممكن تطبيقها على النظام المفتوح.

2.4 Existence of Solutions المتوفرة للحلول

السؤال عن وجود حلول متوفرة للمعادلات التكاملية للمذبذب كانت محور البحث للعديد من الباحثين -[26] [28]. وقد اعطوا البراهين القوية على وجود قيم eigenvalues ودوال eigenfunctions للكرنيل الخاص بهندسة المذبذب، مثل تلك المذبذبات التي تحتوي على مستويات متوازية وعلى مرآيا منحنية كروية.

3.4 المعادلات التكاملية للمذبذبات بمرآيا كروية

عندما تكون المرآيا كروية ولها منفذ مستطيل أو دائري، فإن المعادلات التكاملية في بعدين يمكن تفصل وتختصر في صورة معادلات في بعد واحد والتي تكون أسهل للحل أما بالطرق التحليلية أو العددية. ولهذا في حالة المرآيا المستطيلة [6]-[4]، [24]، [29]، [30]، فإن المعادلات ذات البعد الواحد في المحاور الكارتيزية لها نفس تلك التي في المرآيا ذات الشريحة الغير محدودة، ولإحداثي x فإن لها

$$\begin{aligned}\gamma_x^{(1)}u^{(1)}(x_1) &= \int_{-a_2}^{a_2} K(x_1, x_2)u^{(2)}(x_2)dx_2 \\ \gamma_x^{(2)}u^{(2)}(x_2) &= \int_{-a_1}^{a_1} K(x_1, x_2)u^{(1)}(x_1)dx_1\end{aligned}\quad (74)$$

حيث الكيرينل K يعطى بالعلاقة التالية:



$$K(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{j}{\lambda d}} \cdot \exp \left\{ -\frac{jk}{2d} (g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 - 2x_1 x_2) \right\}. \quad (75)$$

معادلات مشابهة يمكن أن تكتب لإحداثي y ، وبالتالي فإن $E(x, y) = u(x)v(y)$ و $\gamma = \gamma_x \gamma_y$. في المعادلة أعلاه، فإن a_1 و a_2 هي اتساع المنتصف للمرايا في البعد x ، و d هي المسافة الفاصلة بين المرآتين. و k هي $2\pi/\lambda$ ، و λ هي الطول الموجي. نصف قطر التحدب للمرايا R_1 و R_2 هما متضمنان في المعاملين التاليين:

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 - \frac{d}{R_1} \\ g_2 &= 1 - \frac{d}{R_2}. \end{aligned} \quad (76)$$

ولحالة المرايا الدائرية [4]، [31]، [32] فإن المعادلات تختصر إلى بعد واحد باستخدام الإحداثيات الاسطوانية وبافتراض أن التغير في المجال هو جيبي دوري، أي أن $E(r, \Phi) = R_l(r)e^{-i\Phi}$. دوال التوزيع القطرية $R_l^{(1)}$ و $R_l^{(2)}$ تحقق المعادلات التكاملية ذات البعد الواحد:

$$\begin{aligned} \gamma_l^{(1)} R_l^{(1)}(r_1) \sqrt{r_1} &= \int_0^{a_2} K_l(r_1, r_2) R_l^{(2)}(r_2) \sqrt{r_2} dr_2 \\ \gamma_l^{(2)} R_l^{(2)}(r_2) \sqrt{r_2} &= \int_0^{a_1} K_l(r_1, r_2) R_l^{(1)}(r_1) \sqrt{r_1} dr_1 \end{aligned} \quad (77)$$

حيث إن الكرنيل K يعطى على النحو التالي:

$$\begin{aligned} K_l(r_1, r_2) &= \frac{j^{l+1}}{d} J_l \left(k \frac{r_1 r_2}{d} \right) \sqrt{r_1 r_2} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{jk}{2d} (g_1 r_1^2 + g_2 r_2^2) \right\} \end{aligned} \quad (78)$$



و J_l هي دالة بيسيل Bessel function للنوع الأول والرتبة l th. في المعادلة (77)، a_1 و a_2 هما نصف قطر منفذ المرآة و d هي المسافة الفاصلة بين المرآتين، و g_1 و g_2 يعطيان بالمعادلة (76).

باستثناء الحالة الخاصة للمذبذب البؤري [5] ($g_1=g_2=0$)، لا يوجد حل تحليل مضبوط لكلا من المعادلتين (74) و (77)، ولكن الطرق التقريبية والعديدية المستخدمة نجحت في إيجاد حلول. وقبل ان نقدم الحلول، فانه من المناسب أن نناقش خاصيتين مهمتين تطبقان على المذبذبات ذات المرايا الكروية، هذه الخواص هي التكافؤ والاستقرار.

4.4 أنظمة المذبذبات المكافئة Equivalent Resonator Systems

الخصائص المكافئة [24]، [33] للمذبذب للمرايا الكروية تم الحصول عليها باستخدام المعالجات الجبرية البسيطة للمعادلات التكاملية. أولاً، من الواضح أن المرايا يمكن أن يتبادلا بدون التأثير على النتائج، وهذا فان الرموز السفلية والعلوية 1 و 2 يمكن ان تتبدلا. ثانياً، الفقد الناتج عن الحيود والشدة للأنماط لا تتغير عند عكس إشارتي كلا من g_1 و g_2 ، ودوال الايجن E وقيم الايجن γ فقط هما اللذان يؤخذا كقيم اقتران مركبة. مثالا على الأنظمة المكافئة هو المستويات المتوازية ($g_1=g_2=1$) والمرايا المتحدة المركز ($g_1=g_2=-1$) لأنظمة المذبذبات.

الخاصية المكافئة الثلاثة تشمل عدد فرنيل N ومعاملي الاستقرار G_1 و G_2 حيث أن

$$\begin{aligned} N &= \frac{a_1 a_2}{\lambda d} \\ G_1 &= g_1 \frac{a_1}{a_2} \\ G_2 &= g_2 \frac{a_2}{a_1} \end{aligned} \quad (79)$$



إذا كانت هذه المعاملات الثلاثة هي نفسها لأي مذبذبين فأنهما يكون لهما نفس الفقد الناتج عن الحيود، ونفس تردد المذبذب، ونفس أشكال الأنماط الاهتزازية. لهذا فان العلاقات المكافئة تختصر بشكل كبير عدد الحسابات الضرورية للحصول على الحلول للعديد من الأشكال الهندسية للمذبذبات.

5.4 شرط الاستقرار والمخططات Stability Condition and Diagram

تم مناقشة الاستقرار للمذبذبات البصرية في الجزء 2 بدلالة الهندسة البصرية. شرط الاستقرار يعطى بالمعادلة (8). وبدلالة معاملات الاستقرار G_1 و G_2 ، فانه يكون

$$0 < G_1 G_2 < 1$$

أو

$$0 < g_1 g_2 < 1. \quad (80)$$

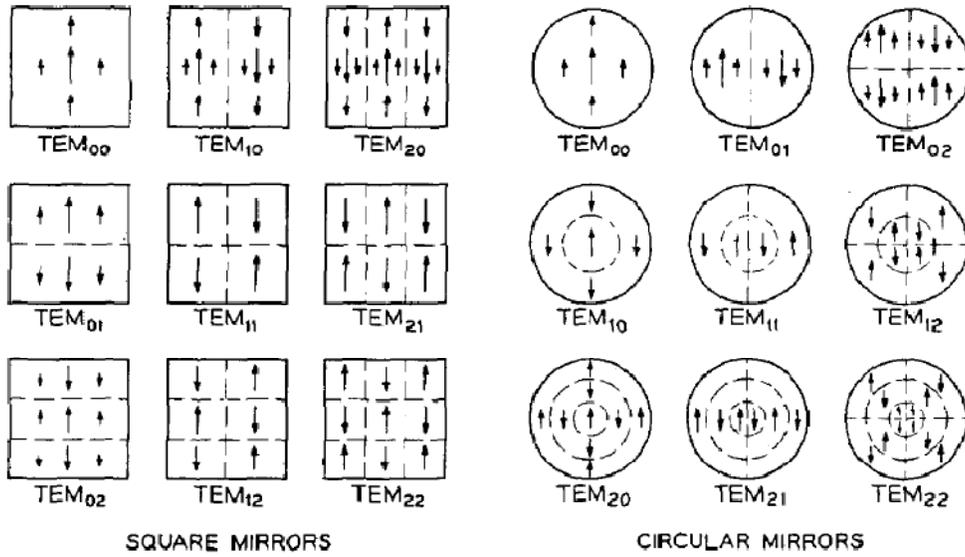
المذبذبات تكون مستقرة إذا كان الشرط متحقق وتكون غير مستقرة إذا كان غير ذلك.

مخطط الاستقرار [6]، [24] للعديد من الأشكال الهندسية للمذبذبات موضح في الشكل 4 حيث g_1 و g_2 هما محاور الإحداثيات وكل نقطة على المخطط تمثل شكل هندسي محدد للمذبذب. الحدود بين المناطق المستقرة والغير مستقرة (المظللة) تحدد بواسطة المعادلة (80)، والتي تعتمد على الهندسة البصرية. مجالات الأنماط في المذبذبات المستقرة تكون متمركزة بالقرب من محور المذبذب أكثر من تلك في حالة المذبذبات الغير مستقرة، ولهذا، فان فقدان بسبب الحيود في المذبذبات الغير مستقرة يكون أكثر من المذبذبات المستقرة. الانتقال الذي يحدث بالقرب من الحدود متدرج في حالة المذبذبات التي يكون لها أعداد فرينيل صغيرة ويكون أكثر حدة في حالة أعداد فرينيل الكبيرة، أصل المخطط يمثل النظام البؤري بمرايا ذات تحدب متساوي ويكون نقطة اقل فقد بسبب الحيود لأي عدد فرينيل. الحقيقة إن النظام بالمرايا التي تحيد عن النظام البؤري المثالي يمكن أن تصبح غير مستقرة ويجب أن تؤخذ بالحسبان عند تصميم مذبذبات الليزر.

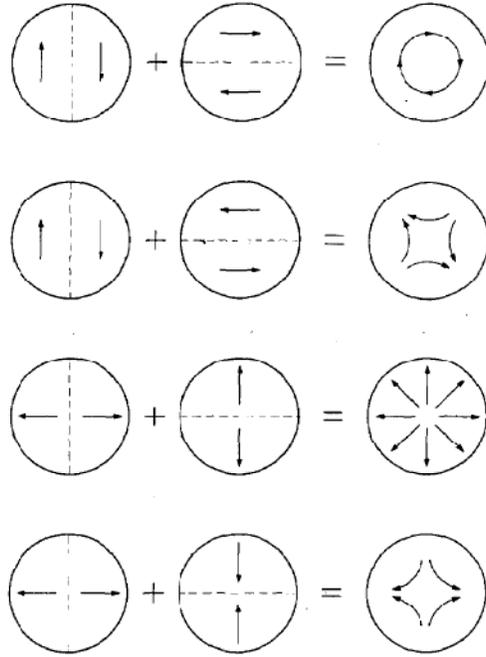


6.4 أنماط المذبذبات Modes of the Resonator

توزيع المجال المستعرض لأنماط المذبذب تعطي بدوال الايجن للمعادلات التكاملية. وحيث انه لا يوجد حل تحليلي مضبوط للحالة العامة عندما تكون G_1 و G_2 اختيارية، ولكن الصيغ التحليلية التقريبية تصف المجالات في المذبذبات المستقرة ذات المرايا الكرية [15]، [6]. هذه الدوال الايجن المقربة تكون نفسها لأنماط الشعاع البصري الذي تم مناقشته في الجزء 2، وهذا يكون توزيع المجال معطى بالتقريب بواسطة دوال جاوسيان-هيرميت للمرايا المستطيلة [5]، [6]، [34]، وبدوال جاوسيان-لاجيري للمرايا الكروية [6]، [7]. الأسماء المميزة لأنماط المذبذب معطاة في الجزء 5.3. (الأنماط تسمى على النحو TEM_{mnq} للمرايا المستطيلة و TEM_{plq} للمرايا الدائرية). الشكل 7 يوضح صور لبعض الأنماط المستطيلة لليزر.



الشكل 17. أشكال أنماط المذبذب المستقطب خطيا للمرايا المربعة والدائرية



الشكل 18. تركيب لأشكال الاستقطاب المختلفة من النمط TEM_{01} المستقطب خطيا

الأنماط المستقطبة الخطية للمرايا المربعة والمرايا الدائرية موضحة في الشكل 17. ودمج كلا من الأنماط المستقطبة المتعامدة التي لها نفس الرتبة، فانه من الممكن أن تكون أشكال استقطاب أخرى، وهذا موضح في الشكل 18 للنمط TEM_{01} .

توزيع المجال لأنماط المذبذب لأي قيمة G يمكن أن نحصل عليها عدديا بحل المعادلات التكاملية إما بطريقة التقريب المتعاقب [4]، [24]، [31] أو بواسطة طريقة توسع الكيرنيل [30]، [32]. الطريقة السابقة للحل تكافئ حساب سلوك الانتقال للمذبذب عندما يثار في البداية بواسطة موجة اختيارية التوزيع. هذه الموجة افترض على إنها تنتقل ذهابا وإيابا بين المرآتين في المذبذب، وتعرض لتغيرات بين كل انتقال وانتقال وتفقد طاقة بواسطة الحيود. بعد العديد من الانتقالات تصل إلى حالة شبه الاستقرار حيث يكون المجال بعد انتقالات متعاقبة يختلف فقط بمعامل ثابت. هذه الحالة من الاستقرار لتوزيع المجال النسبي يكون دالة ايجن للمعادلات التكاملية، وفي الواقع، توزيع المجال للنمط الذي له اقل خسارة حيود يفترض انه متماثل (على سبيل المثال، لتماثل فردي أو زوجي في حالة المرايا ذات الشرائح اللامنتهية، أو في حالة المرايا الدائرية)، المعامل المضاعف الثابت هو قيمة ايجن مرتبط مع الدالة الايجن ويعطي مقدار الخسارة بسبب الحيود والإزاحة في الطور للنمط. كذلك هذا الشكل البسيط التكراري يعطي فقط الحلول للرتب المنخفضة، ويمكن أن تحسن

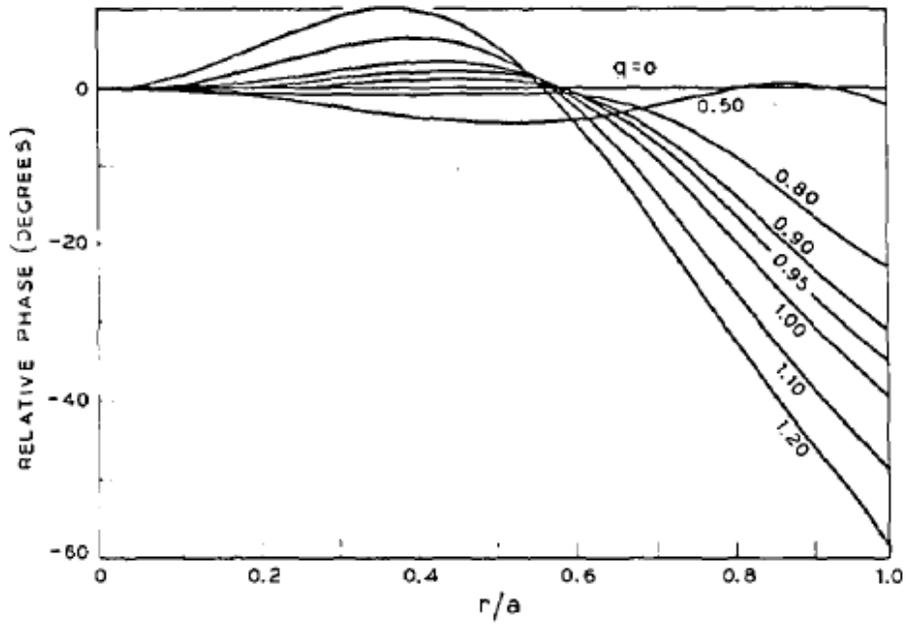
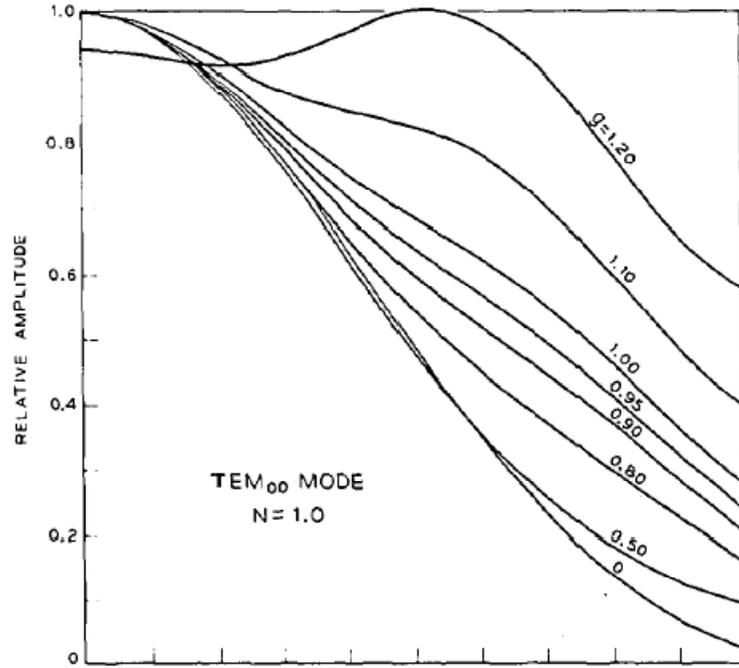


لتعطي الرتب الأعلى [24]، [35]. طريقة توسع الكيرنيل، على كل حال، قادرة على إنتاج كلا من الحلول ذات الرتب المنخفضة والرتب العليا.

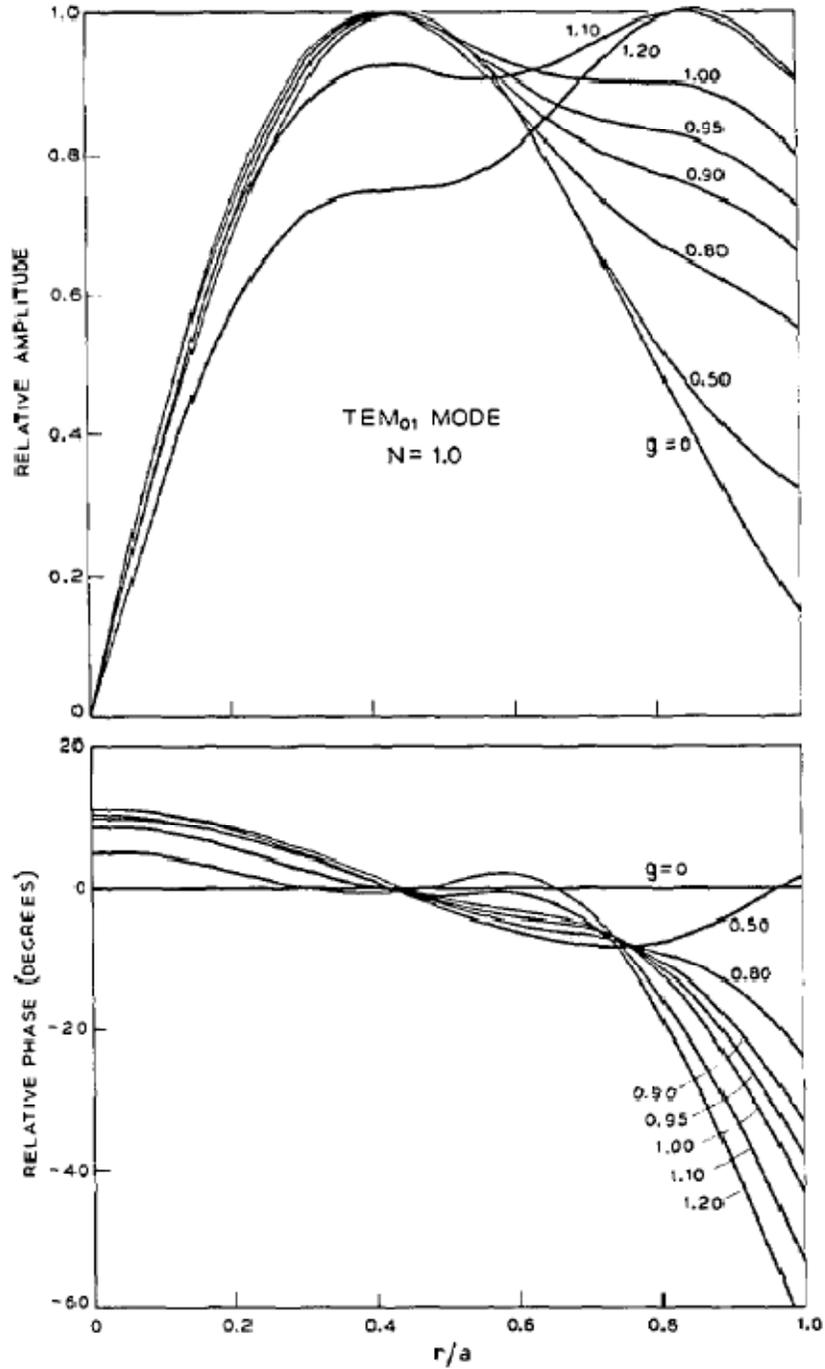
الأشكال 19 و 20 توضح توزيع المجال النسبي للأنماط TEM_{00} و TEM_{01} للمذبذب الذي يتكون من مرأتين دائريتين متماثلتين ($N=1, a_1=a_2, g_1=g_2=g$) كما تم تحديد ذلك بواسطة الطريقة العددية التكرارية. والعديد من المنحنيات الموضحة للقيم المختلفة من g ، تتراوح من الصفر (البؤري) مرورا بـ (المستوى المتوازي) وحتى 1.2 (المحذب، الغير مستقر). وبحكم الخواص المكافئة التي نوقشت في الجزء 4.4، فإن المنحنيات تكون أيضا قابلة للاستخدام في المذبذبات بقيم g ذات إشارة معكوسة، إذا علمت أن إشارة الإحداثي الرأسي للتوزيع الطور والذي هو أيضا عكست إشارته. وقد وجد أن المجال يكون له أكثر تركيز بالقرب من محور المذبذب لـ $g=0$ و تنتشر للخارج كلما زادت قيمة $|g|$. ولهذا فإن خسارة الحيود يتوقع أن تكون اقل ما يمكن للمذبذبات البؤرية.

الشكل 21 يوضح توزيعات المجال النسبية لبعض الأنماط ذات الرتب المنخفضة لمذبذب فابري-بيروت الذي يمتلك مرآيا دائرية (مستوى متوازي) ($N=10, a_1=a_2, g_1=g_2=g$) كما تم الحصول عليها بطريقة عددية تكرارية معدلة [35]. ومن الشيق أن نلاحظ إن هذه المنحنيات ليست ناعمة تماما ولكنها تحتوي على تعرجات صغيرة عليها، العدد المرتبط بعدد فرينل. هذه التعرجات تختفي تماما في المذبذب البؤري وتظهر عندما تكون هندسة المذبذب غير مستقر أو قريبا من الغير مستقر. الصيغ التقريبية لتوزيع المجال لأنماط مذبذب فابري-بيروت تم الحصول عليها أيضا بطرق تحليلية مختلفة [36]، [37]. وهي ممثلة للترتبة الأولى، بدوال الجيب وجيب التمام للمرايا ذات الشريحة اللامتناهية وبدوال ببسيل للمرايا الدائرية.

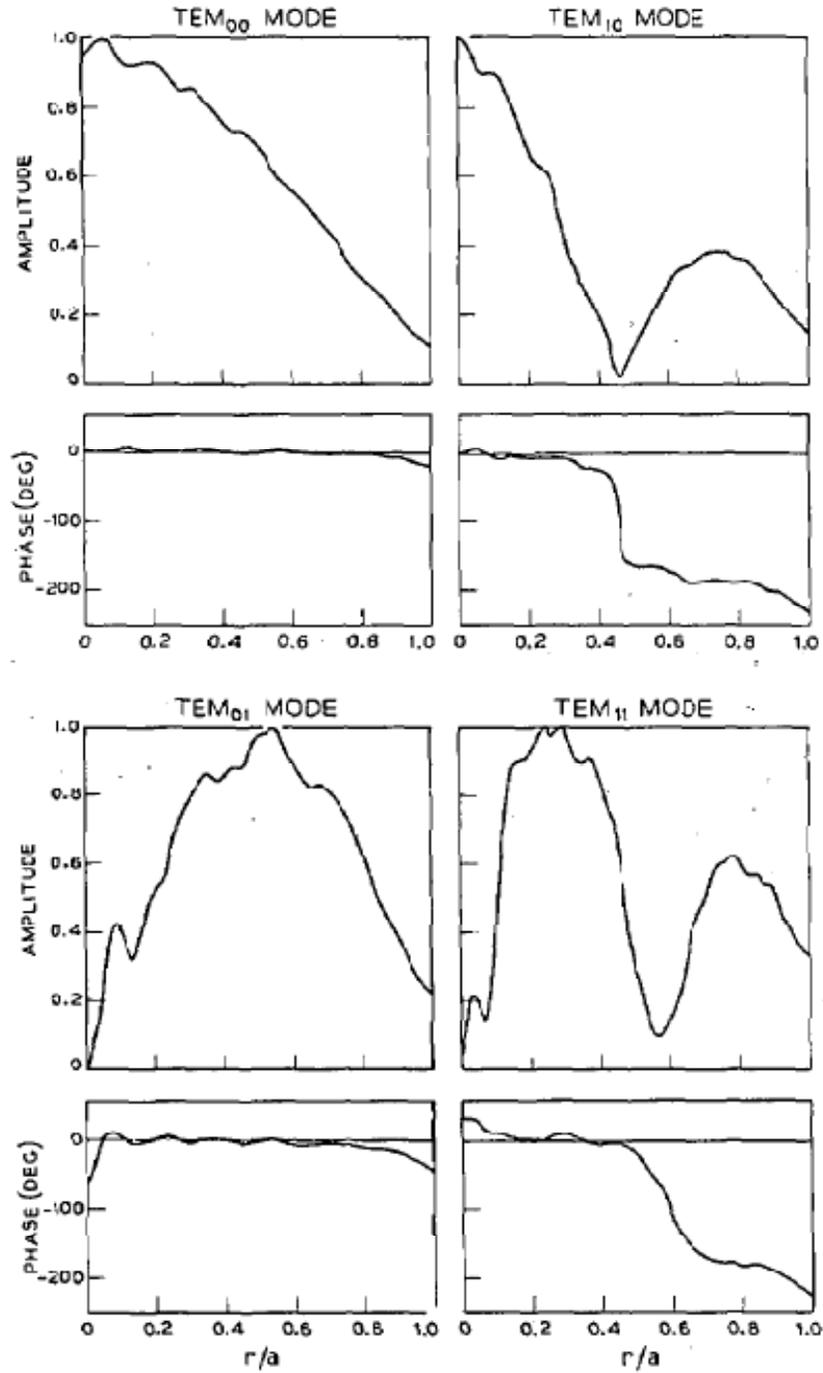
في حالة خاصة للمذبذب البؤري ($g_1=g_2=0$)، الدوال الايجن تكون ذات انقلاب ذاتي تحت فورييه المحدود (المرايا ذات الشريحة اللامتناهية) أو Hankel (المرايا الدائرية) حيث يوجد حلول تحليلية دقيقة [5]، [40]-[38]. دوال الايجن لمرايا الشريحة اللامتناهية تعطى بدوال موجية شبه كروية وكذلك للمرايا الدائرية، تعطى بواسطة الدوال الموجية hyperspheroidal او الشبه دائرية. ولأعداد فرنيل الكبيرة فإن هذه الدوال يمكن أن تقترب من تقريب دوال جاوسيان هيرميت وجاوسيان لاجيري والتي تكون دوال ايجن لأنماط الشعاع.



الشكل 19. توزيع المجال النسبي للنمط TEM_{00} للمذبذب بالمرآيا الدائرية ($N=1$).



الشكل 20. توزيع المجال النسبي للنمط TEM_{01} للمذبذب بالمرآيا الدائرية ($N=1$).



الشكل 21 توزيعات المجال النسبي للأربع أنماط ذات الرتب المنخفضة لمذبذب فابري-بيروت ذو المرايا الدائرية (المستوى المتوازي) ($N=10$).



7.4 الخسارة الناتجة عن الحيود وإزاحات الطور Diffraction Losses and Phase Shifts

تعتبر الخسارة الناتجة عن الحيود وإزاحة الطور لنمط محدد كميات هامة في تحديد قيمة Q وتردد المذبذب لأي نمط. والخسارة الناتجة عن الحيود تعطى بالعلاقة التالية:

$$\alpha = 1 - |\gamma|^2 \quad (81)$$

والتي هي جزء الطاقة المفقود لكل رحلة او لكل انتقال نتيجة لتأثير الحيود عند المرايا. وإزاحة الطور تعطى بالعلاقة التالية:

$$\beta = \text{angle of } \gamma \quad (82)$$

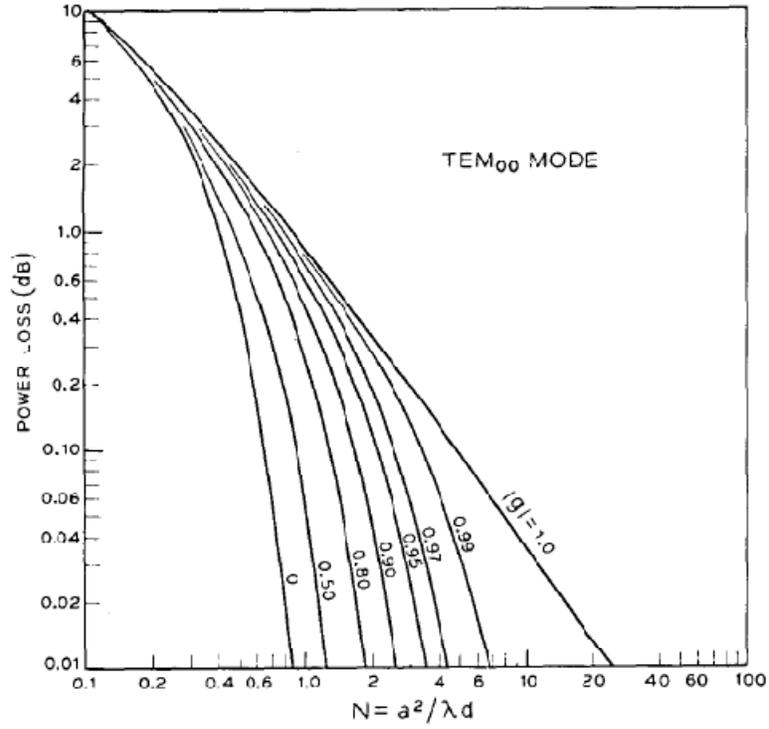
والتي هي إزاحة الطور التي تتعرض لها المودة في كل رحلة أو انتقال من مرآة إلى المرآة الأخرى، بالإضافة إلى إزاحة الطور الهندسية والتي تعطى بـ $2\pi d/\lambda$. القيمة الايجن γ في المعادلة (81) و (82) هي الـ γ المناسبة للنمط تحت الدراسة. وإذا كان مقدار خسارة المذبذب الكلية صغيرة، فإن Q للمذبذب يمكن أن تقرب بواسطة

$$Q = \frac{2\pi d}{\lambda \alpha_t} \quad (83)$$

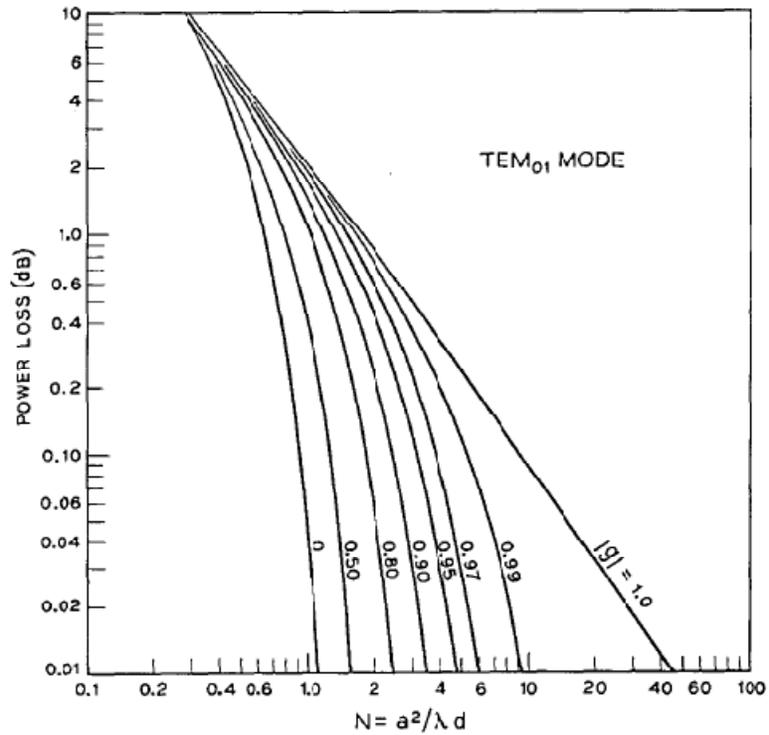
حيث α_t ، هي خسارة المذبذب الكلية، والتي تشمل الخسارة الناتجة عن الحيود، والامتصاص، والاقتران، والتشتت والتأثيرات الأخرى. وتردد المذبذب ν يعطى بالعلاقة التالية:

$$\nu/\nu_0 = (q + 1) + \beta/\pi \quad (84)$$

حيث q ، رتبة النمط الاهتزازي الطولي، و ν_0 ، هي تردد النبضة الأساسية، والتي عرفت في الجزء 3.5.



الشكل 22. الخسارة الناتجة عن الحيود لكل رحلة (بوحددة الديسيبل) للنمط TEM₀₀ للمذبذب المستقر بمرايا دائرية



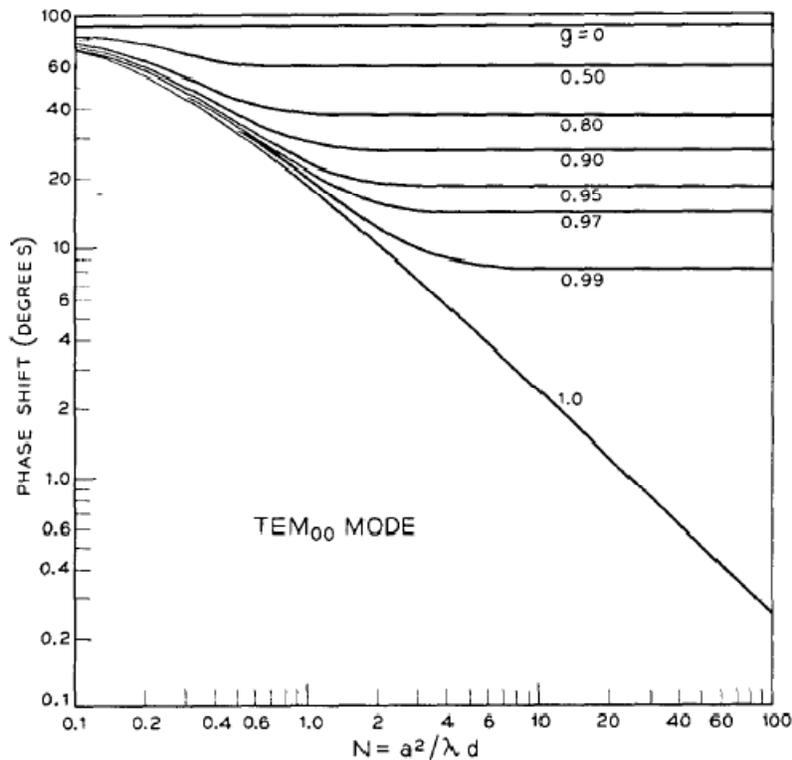
الشكل 23. الخسارة الناتجة عن الحيود لكل رحلة (بوحددة الديسيبل) للنمط TEM₀₁ للمذبذب المستقر بمرايا دائرية



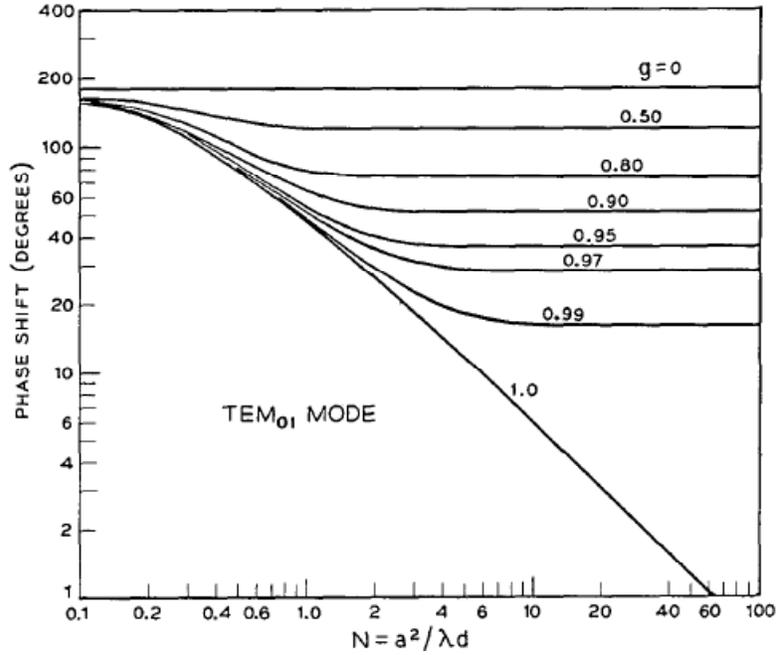
الخسارة الناتجة عن الحيود للنمطين (TEM_{01} ، TEM_{00}) لمذبذب مستقر مع زوج من المرايا الدائرية المتماثلة ($a_1=a_2$, $g_1=g_2=g$) موضحة في الشكل 22 والشكل 23 كدالة في عدد فرينيل N وللعديد من قيم g ، والمنحنيات نحصل عليها بحل المعادلة (77) عدديا باستخدام طريقة التقريب المتتابع [31]. المنحنيات المقابلة لإزاحة الطور موضحة في الشكل 24 و 25. والجزء الأفقي لمنحنيات إزاحة الطور يمكن أن تحسب من الصيغة التالية:

$$\begin{aligned}\beta &= (2p + l + 1) \text{ arc cos } \sqrt{g_1 g_2} \\ &= (2p + l + 1) \text{ arc cos } g, \quad \text{for } g_1 = g_2 \quad (85)\end{aligned}$$

والتي تساوي إزاحة الطور لأنماط الشعاع المشتق في الجزء 5.3. ومن الملاحظ أن منحنيات الخسارة تنطبق على كلا من القيم الموجبة والسالبة لـ g



الشكل 24. إزاحة الطور لكل انتقال للنمط TEM_{01} لمذبذب مستقر بمرايا دائرية



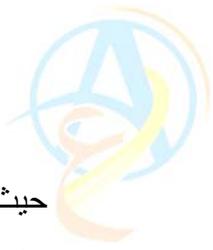
الشكل 24. إزاحة الطور لكل انتقال للنمط TEM_{00} لمذبذب مستقر بمرايا دائرية

في حين إن منحنيات إزاحة الطور هي فقط للقيم الموجبة لـ g ، وإزاحة الطور لقيم g السالبة تساوي 180 درجة سالبة لقيم g الموجبة.

وقد تم الحصول على الصيغ التحليلية للخسارة بواسطة الحيود وإزاحة الطور لحالات خاصة للمستوى المتوازي ($g=1.0$) والبؤري ($g=0$) عندما يكون عدد فريني لاما كبير جدا (لقيم خسارة بسبب الحيود صغيرة) أو لقيم صغيرة جدا (لقيم خسارة بسبب الحيود كبيرة) [36]، [38]، [41]، [42]. في حالة مذبذب المستوى المتوازي بمرايا دائرية، فإن الصيغ التقريبية تتحقق أيضا لقيم N كبيرة، كما تم اشتقاقها بواسطة Vainshtein [36]، وتكون على النحو التالي:

$$\alpha = 8\kappa_{pl} \frac{\delta(M + \delta)}{[(M + \delta)^2 + \delta^2]^2} \quad (86)$$

$$\beta = \left(\frac{M}{4\delta}\right) \alpha \quad (87)$$



حيث $\delta=0.824$ ، $M=\sqrt{8\pi N}$ ، و $\kappa_{p,l}$ تكون $(p+1)$ th صفر لدالة بيسيل للرتبة l . وللمذبذب البؤري بمرايا دائرية، فإن الصيغ المقابلة تكون على النحو التالي: [39]

$$\alpha = \frac{2\pi(8\pi N)^{2p+l+1}e^{-4\pi N}}{p!(p+l+1)!} \left[1 + 0 \left(\frac{1}{2\pi N} \right) \right] \quad (88)$$

$$\beta = (2p+l+1) \frac{\pi}{2} . \quad (89)$$

صيغ مشابهة توجد للمذبذبات بشريحة لا متناهية أو مرايا مستطيلة [36]، [39]. والتوافق بين القيم التي نحصل عليها من الصيغ أعلاه وتلك التي نحصل عليها من الطرق العديدة ممتازة.

الفقد للرتبة الأقل للنمط (TEM_{00}) في المذبذب الغير مستقر لا تعتمد على حكم وشكل المرآة للرتبة الأولى. والصيغة للفقد المعتمدة على الهندسة البصرية هي على النحو التالي: [12]

$$\alpha = 1 \pm \frac{1 - \sqrt{1 - (g_1 g_2)^{-1}}}{1 + \sqrt{1 - (g_1 g_2)^{-1}}} \quad (90)$$

حيث الإشارة الموجبة تطبق على قيم g التي تقع في الربع الأول والثالث لمنحنيات الاستقرار، والإشارة السالبة تنطبق على الربعين الآخرين. ومنحنيات الفقد (المرسومة مع N) نحصل عليها بحل المعادلات التكاملية عدديا والتي تكون لها سلوك متموج والذي يحدث بسبب تأثيرات الحيود [24]، [43]. ولكن القيم المتوسطة تتفق بشكل جيد مع تلك التي نحصل عليها من المعادلة (90).



5. ملاحظات ختامية CONCLUDING REMARKS

قيود الفراغ تجعل من الضروري أن نركز مناقشتنا في هذا البحث على المبادئ الأساسية لشعاع الليزر والمذبذبات. ولم يكن ممكناً أن نضمن مثل هذه المواضيع المهمة كاضطراب في المذبذبات، المذبذبات بمرايا مائلة، أو لناخذ بعين الاعتبار التأثير الغير خطي، أو تشبع مادة الوسط. كذلك تم إهمال النقاش حول العديد من التراكيب غير تلك التي تشكلت بمرايا كروية، مثل المذبذب بعواكس ذات أركان مكعبة، أو المذبذبات التي تحتوي على ثقوب في المخرج، أو مذبذبات الفيبر. كما إن هناك مجال مهم ولكنه أهمل وهو اختيار النمط بحيث يجرى عليه الكثير من البحوث حالياً. وعرض مختصر لهذه المواضيع موضع في [44].

تمت الترجمة في المركز العلمي للترجمة

www.trgma.com

31-12-2009



REFERENCES

- [1] R. H. Dicke, "Molecular amplification and generation systems and methods," U. S. Patent 2 851 652, September 9, 1958.
- [2] A. M. Prokhorov, "Molecular amplifier and generator for sub-millimeter waves," *JETP (USSR)*, vol. 34, pp. 1658–1659, June 1958; *Sov. Phys. JETP*, vol. 7, pp. 1140–1141, December 1958.
- [3] A. L. Schawlow and C. H. Townes, "Infrared and optical masers," *Phys. Rev.*, vol. 29, pp. 1940–1949, December 1958.
- [4] A. G. Fox and T. Li, "Resonant modes in an optical maser," *Proc. IRE (Correspondence)*, vol. 48, pp. 1904–1905, November 1960; "Resonant modes in a maser interferometer," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 40, pp. 453–488, March 1961.
- [5] G. D. Boyd and J. P. Gordon, "Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 40, pp. 489–508, March 1961.
- [6] G. D. Boyd and H. Kogelnik, "Generalized confocal resonator theory," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 41, pp. 1347–1369, July 1962.

- [7] G. Goubau and F. Schwering, "On the guided propagation of electromagnetic wave beams," *IRE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-9, pp. 248–256, May 1961.
- [8] J. R. Pierce, "Modes in sequences of lenses," *Proc. Nat'l Acad. Sci.*, vol. 47, pp. 1808–1813, November 1961.
- [9] G. Goubau, "Optical relations for coherent wave beams," in *Electromagnetic Theory and Antennas*. New York: Macmillan, 1963, pp. 907–918.
- [10] H. Kogelnik, "Imaging of optical mode—Resonators with internal lenses," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 44, pp. 455–494, March 1965.
- [11] —, "On the propagation of Gaussian beams of light through lenslike media including those with a loss or gain variation," *Appl. Opt.*, vol. 4, pp. 1562–1569, December 1965.
- [12] A. E. Siegman, "Unstable optical resonators for laser applications," *Proc. IEEE*, vol. 53, pp. 277–287, March 1965.



- [13] W. Brower, *Matrix Methods in Optical Instrument Design*. New York: Benjamin, 1964. E. L. O'Neill, *Introduction to Statistical Optics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963.
- [14] M. Bertolotti, "Matrix representation of geometrical properties of laser cavities," *Nuovo Cimento*, vol. 32, pp. 1242–1257, June 1964. V. P. Bykov and L. A. Vainshtein, "Geometrical optics of open resonators," *JETP (USSR)*, vol. 47, pp. 508–517, August 1964. B. Macke, "Laser cavities in geometrical optics approximation," *J. Phys. (Paris)*, vol. 26, pp. 104A–112A, March 1965. W. K. Kahn, "Geometric optical derivation of formula for the variation of the spot size in a spherical mirror resonator," *Appl. Opt.*, vol. 4, pp. 758–759, June 1965.
- [15] J. R. Pierce, *Theory and Design of Electron Beams*. New York: Van Nostrand, 1954, p. 194.
- [16] H. Kogelnik and W. W. Rigrod, "Visual display of isolated optical-resonator modes," *Proc. IRE (Correspondence)*, vol. 50, p. 220, February 1962.
- [17] G. A. Deschamps and P. E. Mast, "Beam tracing and applications," in *Proc. Symposium on Quasi-Optics*. New York: Polytechnic Press, 1964, pp. 379–395.
- [18] S. A. Collins, "Analysis of optical resonators involving focusing elements," *Appl. Opt.*, vol. 3, pp. 1263–1275, November 1964.
- [19] T. Li, "Dual forms of the Gaussian beam chart," *Appl. Opt.*, vol. 3, pp. 1315–1317, November 1964.
- [20] T. S. Chu, "Geometrical representation of Gaussian beam propagation," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 45, pp. 287–299, February 1966.
- [21] J. P. Gordon, "A circle diagram for optical resonators," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 43, pp. 1826–1827, July 1964. M. J. Offerhaus, "Geometry of the radiation field for a laser interferometer," *Philips Res. Rept.*, vol. 19, pp. 520–523, December 1964.
- [22] H. Stutz and C. L. Tang, "Problem of mode deformation in optical masers," *J. Appl. Phys.*, vol. 36, pp. 1816–1819, June 1965.



- [23] A. G. Fox and T. Li, "Effect of gain saturation on the oscillating modes of optical masers," *IEEE J. of Quantum Electronics*, vol. QE-2, p. lxii, April 1966.
- [24] —, "Modes in a maser interferometer with curved and tilted mirrors," *Proc. IEEE*, vol. 51, pp. 80–89, January 1963.
- [25] F. B. Hildebrand, *Methods of Applied Mathematics*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1952, pp. 412–413.
- [26] D. J. Newman and S. P. Morgan, "Existence of eigenvalues of a class of integral equations arising in laser theory," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 43, pp. 113–126, January 1964.
- [27] J. A. Cochran, "The existence of eigenvalues for the integral equations of laser theory," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 44, pp. 77–88, January 1965.
- [28] H. Hochstadt, "On the eigenvalue of a class of integral equations arising in laser theory," *SIAM Rev.*, vol. 8, pp. 62–65, January 1966.
- [29] D. Gloge, "Calculations of Fabry-Perot laser resonators by scattering matrices," *Arch. Elect. Ubertrag.*, vol. 18, pp. 197–203, March 1964.
- [30] W. Streifer, "Optical resonator modes—rectangular reflectors of spherical curvature," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 55, pp. 868–877, July 1965
- [31] T. Li, "Diffraction loss and selection of modes in maser resonators with circular mirrors," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 44, pp. 917–932, May–June, 1965.
- [32] J. C. Heurtley and W. Streifer, "Optical resonator modes—



- circular reflectors of spherical curvature,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 55, pp. 1472–1479, November 1965.
- [33] J. P. Gordon and H. Kogelnik, “Equivalence relations among spherical mirror optical resonators,” *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 43, pp. 2873–2886, November 1964.
- [34] F. Schwering, “Reiterative wave beams of rectangular symmetry,” *Arch. Elect. Übertrag.*, vol. 15, pp. 555–564, December 1961
- [35] A. G. Fox and T. Li, to be published.
- [36] L. A. Vainshtein, “Open resonators for lasers,” *JETP (USSR)*, vol. 44, pp. 1050–1067, March 1963; *Sov. Phys. JETP*, vol. 17, pp. 709–719, September 1963.
- [37] S. R. Barone, “Resonances of the Fabry-Perot laser,” *J. Appl. Phys.*, vol. 34, pp. 831–843, April 1963.
- [38] D. Slepian and H. O. Pollak, “Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty—I,” *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 40, pp. 43–64, January 1961.
- [39] D. Slepian, “Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty—IV: Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions,” *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 43, pp. 3009–3057, November 1964.
- [40] J. C. Heurtley, “Hyperspheroidal functions—optical resonators with circular mirrors,” in *Proc. Symposium on Quasi-Optics*. New York: Polytechnic Press, 1964, pp. 367–375.
- [41] S. R. Barone and M. C. Newstein, “Fabry-Perot resonances at small Fresnel numbers,” *Appl. Opt.*, vol. 3, p. 1194, October 1964.
- [42] L. Bergstein and H. Schachter, “Resonant modes of optic cavities of small Fresnel numbers,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 55, pp. 1226–1233, October 1965.
- [43] A. G. Fox and T. Li, “Modes in a maser interferometer with curved mirrors,” in *Proc. Third International Congress on Quantum Electronics*. New York: Columbia University Press, 1964, pp. 1263–1270.
- [44] H. Kogelnik, “Modes in optical resonators,” in *Lasers*, A. K. Levine, Ed. New York: Dekker, 1966.