Fundamentals of Plasma Physics

Paul M. Bellan

Chapter 9

MHD equilibria

توازن MHD

1.9 لماذا نستخدم MHD؟

يوجد ثلاثة مستويات لوصف البلازما هي: Vlasov، والمائع المزدوج (two-fluid)، وMHD. ويعتبر Vlasov الأكثر دقة والـ MHD هو الأقل دقة. والسؤال الذي يطرح نفسه لماذا إذا نستخدم MHD؟ الإجابة تكمن في أن MHD هي وصف من وجهة نظر ماكروسكوبية (جاهريه)، واستخدام MHD يعتبر أكثر كفاءة في الحالات في حين إن الكثير من التفاصيل والدقة التي توفرها Vlasov المائع المزدوج تكون غير ضرورية. MHD بالأخص مناسبة في الحالات التي تكون ذات طبيعة هندسية معقدة لأنه من الصعب جدا نمذجة هذه الحالات باستخدام التوجه الميكروسكوبي (الجوهري) لـ Vlasov أو الطريقتين الاخرتين للمائع ولان التعقيدات الهندسية في الغالب هي الأهم في مستوى وصف MHD. مثل الاتزان والاستقرار الكلي للأبعاد الثلاثة، والمدى المحدود لأشكال البلازما يتم تحليله باستخدام MHD. والمواضيع التي تتطلب استخدام نموذجي المائع أو وجهة نظر Vlasov ممكن أن تكون مهمة، ولكن هذه أسئلة حرجة يمكن أن نؤجل مناقشتها إلى حين فهم بشكل بسيط ومختصر استخدام MHD. وجهة نظر MHD هي بالأخص ذات علاقة بالحالات التي تستخدم فيها القوى المغناطيسية لتحديد وحصر البلازما أو تعجيلها. ومن الأمثلة على هذه الحالات هي البلازما المحصورة في الاندماج المغناطيسي، وبلازما النظام الشمسي والفلكي، والدينامو النجمي والكوكبي، والقوس الكهربي، والدفع بديناميكية المائع المغناطيسي magnetoplasmadynamic. وبالرغم من إن المعادن المنصهرة ليست بلازما، ولكن يمكن وصفها باستخدام MHD وفي الواقع وصف MHD هو الأكثر ملائمة والأكثر دقة في وصف المعادن المنصهرة من وصف البلازما.

سوف نبدأ نقاشنا بفحص خصائص محددة للمجالات المغناطيسية لنكون مفهوم أساسي لكافة أنواع الإجهاد التي تحكم اتزان MHD واستقرارها. معادلة الحركة لـ MHD هي،

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U}\right]=\mathbf{J}\times\mathbf{B}-\nabla P, \qquad (9.1)$$

وهي معادلة عامة للحركة لمائع عادي لأنها تحتوي على القوة المغناطيسية J x B. وتكون لزوجة البلازما في العادة صغيرة جدا ويمكن استبعادها من معادلة MHD للحركة. ولكن، عندما يكون هناك ازدواج، فان هذا يتطلب استخدام حد يعبر عن الإخماد الذي تسببه اللزوجة إذا كنا نرغب في أن نعتبر حالة التوازن وهذا لان مثل هذا الإخماد مطلوب لموازنة الازدواج، وإلا فان البلازما سوف تبرم حول نفسها بدون أن تتوقف. وهذه الحالات سوف نناقشها في الجزء 9.9، وحتى ذلك الوقت سوف نهمل حد اللزوجة من المعادلة (1.9).

2.9 مجال الفراغ المغناطيسي

ابسط المجالات المغناطيسية ينتج من التيار الكهربي خارج المنطقة التي تهمنا والتي لا يمر فيها تيار كهربي. هذا المجال المغناطيسي يسمى بمجال الفراغ لأنه يوجد في الفراغ. ولأنه لا يوجد تيار موضعي، فان مجال الفراغ يحقق المعادلة التالية:

$$\nabla\times\mathbf{B}_{vac}=0. \qquad (9.2)$$

وحيث إن curl التدرج (gradient) دائما يساوي صفر، فان مجال الفراغ يجب أن يكون تدرج جهد قياسي ψ، أي أن مجال الفراغ يمكن أن نعبر عنه بـ $B_{vac} = \nabla\psi$. ولهذا السبب فان مجال الفراغ المغناطيسي أيضا يعرف باسم مجال الجهد المغناطيسي. ولان كل المجالات المغناطيسية تحقق $\nabla\cdot B=0$، فان الجهد ψ يحقق معادلة لابلاس،

$$\nabla^2\psi=0. \qquad (9.3)$$

وعليه فان النظرية الرياضية الكلية لمجالات الفراغ الكهروستاتيكي يمكن أن تستدعى لتشارك عندما ندرس مجالات الفراغ المغناطيسي. نظرية الفراغ الكهروستاتيكي تبين إذا ما كانت ψ أو مشتقاتها على

السطح S الذي يحدد الحجم V، وبالتالي فان ψ تحدد بشكل استثنائي في V. كذلك، إذا كان شكل الاتزان متماثل في اتجاه ما فان معاملات الدوال التفاضلية الجزئية الخطية ذات العلاقة لا تعتمد على هذا الاتجاه، وقد تكون المعادلات الخطية هي تحويلات فوريه Fourier في هذا الاتجاه المهمل. الفراغ بطبيعته متماثل في كل الاتجاهات ومعادلة بوزون تتقلص إلى معادلة لابلاس والتي هي خطية. والعلاقة الخطية والمتماثلة تسبب تقلص معادلة لابلاس إلى احد المعادلات القياسية في الفيزياء الرياضية. على سبيل المثال، اعتبر شكلا اسطوانيا إحداثياته r,θ,z وافترض إن هذا الشكل محوري ومنتظمدارياً (azimuthally) لذا يمكن إهمال كلا من الإحداثيات θ و z، أي أن معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية لا تعتمد على θ و z. تحليلات فوريه للمعادلة (3.9) تتضمن إن ψ يمكن أن نعبر عنها بأنماط متراكبة خطية تتغير بالعلاقة $\exp(im\theta+ikz)$. ولآي اختيار لـ m و k، فان المعادلة (3.9) تصبح على النحو التالي:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\left(\frac{m^2}{r^2}+k^2\right)\psi=0. \qquad (9.4)$$

وبتعريف s=kr يمكن أن نعيد صياغة المعادلة لتكون على النحو التالي:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial s}-\left(1+\frac{m^2}{s^2}\right)\psi=0, \qquad (9.5)$$

وهي معادلة بسل المعدلة. وحلول المعادلة (5.9) هو دوال بسل المعدلة $I_m(kr)$ and $K_m(kr)$. ولهذا فان الحل العام لمعادلة لابلاس يكون على النحو التالي:

$$\psi(r,\theta,z)=\sum_{m=\ \infty}^{\infty}\int_{\infty}\left[a_m(k)I_m(kr)+b_m(k)K_m(kr)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta+\mathrm{i}kz}\,\mathrm{d}k \qquad (9.6)$$

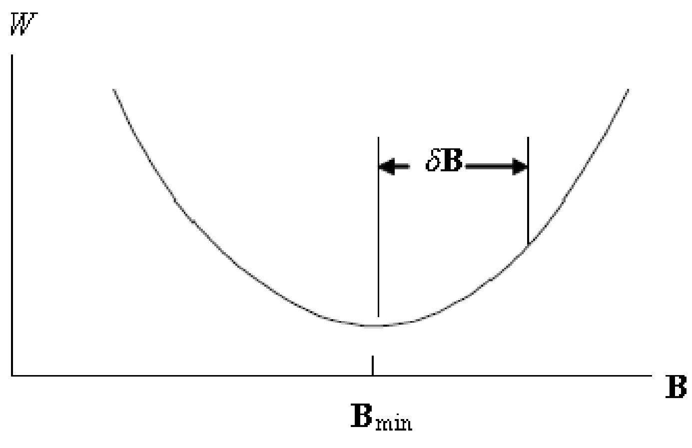
حيث إن المعاملات $a_m(k)$ و $b_m(k)$ تحدد إما من خلال ψ أو المشتقة العادية على السطح المحدد للحجم. الحلول المناظرة ممكن إيجادها في أشكال هندسية لها تماثلات أخرى.

هذا السلوك يمكن أن ندرسه بطريقة أكثر عمومية. المعادلة (3.9) تنص على إن مجموع المشتقة الجزئية الثانية في اتجاهين أو ثلاثة اتجاهات تساوي صفر، وبهذا فان على الأقل واحد من هذه الحدود

يجب أن يساوي صفر وعلى الأقل حد واحد يجب أن يكون موجبا. لان سالب ψ''/ψ تتوافق مع السلوك الاهتزازية (التوافقية) وموجب ψ''/ψ يقابل السلوك الاسي (غير التوافقي)، وأي حل لمعادلة لابلاس يجب أن يكون اهتزازي في اتجاه أو اتجاهين (اتجاه θ أو اتجاه z في حالة المثال ذو الشكل الاسطواني)

المجالات المغناطيسية في المناطق الغير فراغية أكثر تعقيدا من مجالات الفراغ، وعلى نحو مخالف لمجالات الفراغ، لا يمكن أن تحدد بشكل استثنائي بواسطة حدود السطح. وهذا لان المجال في غير الفراغ يحدد بكلا من توزيع التيار داخل الحجم والسطح المحدد. مجالات الفراغ مميزة عن المجالات غير الفراغية لان مجالات الفراغ هي اقل طاقة تحقق الشروط الحدية على السطح S للحجم V. دعنا الآن نثبت هذه الجملة.

اعتبر حجم V محاط بالسطح S الذي يحقق الشروط الحدية. ولنفرض إن $B_{min}(r)$ هي المجال المغناطيسي الذي له اقل طاقة مغناطيسية مخزنة في كل المجالات المغناطيسية الممكنة التي تحقق الشروط الحدية. ونحن سوف نستخدم طرق الرياضيات المتغيرة لإثبات إن اقل طاقة مجال هي مجال الفراغ.



الشكل 1.9 طاقة المجال المغناطيسي لمختلف التشكيلات، B_{min} هي الشكل الذي له اقل طاقة مغناطيسي للشروط الحدية المعطاة

افترض مجال مختلف قليلا يرمز له بالرمز $B(r)$ تحقق بعض الشروط الحدية مثل B_{min}. المجال المختلف قليلا يمكن أن نصفه على انه $B(r) = B_{min}(r) + \delta B(r)$ حيث ان $\delta B(r)$ هو تغير اختياري حول B_{min}. هذه الحالة موضحة في الشكل 1.9 حيث إن المحور الأفقي يمثل خيارات مختلفة متاحة ومتصلة لدالة المتجه $B(r)$. ولان $B(r)$. تحقق نفس الشروط الحدية مثل B_{min}، و $\delta B(r)$ يجب أن تتلاشى على السطح S. مقدار الطاقة W المرتبط بـ $B(r)$ يمكن حسابه على النحو التالي:

$$\begin{aligned} 2\mu_0 W &= \int_V (\mathbf{B}_{\min} + \delta\mathbf{B})^2 \, \mathrm{d}^3 r \\ &= \int_V \mathbf{B}_{\min}^2 \mathrm{d}^3 r + 2\int_V \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_{\min} \mathrm{d}^3 r + \int_V (\delta\mathbf{B})^2 \, \mathrm{d}^3 r. \end{aligned} \tag{9.7}$$

إذا كان الحد في الوسط لا يتلاشى، فان δB يمكن أن نختارها لتكون ضد اتجاه التوازي (antiparallel) لـ B_{min} داخل V وبهذا يكون حاصل ضرب $\delta B.B_{min}$ قيمة سالبة. ولان δB افترضت أنها قيمة صغيرة، فان $\delta B.B_{min}$ سوف تكون اكبر من مقدار $(\delta B)^2$. هذا الاختيار لـ δB سوف يجعل W اقل من الطاقة المفترضة لأقل طاقة مجال، وهذا يتعارض مع الافتراض إن B_{min} هي في الواقع اقل طاقة مجال. وعليه، فان الطريقة الوحيدة لنتأكد إن B_{min} هي القيمة الدنيا هو أن نحقق المعادلة التالية:

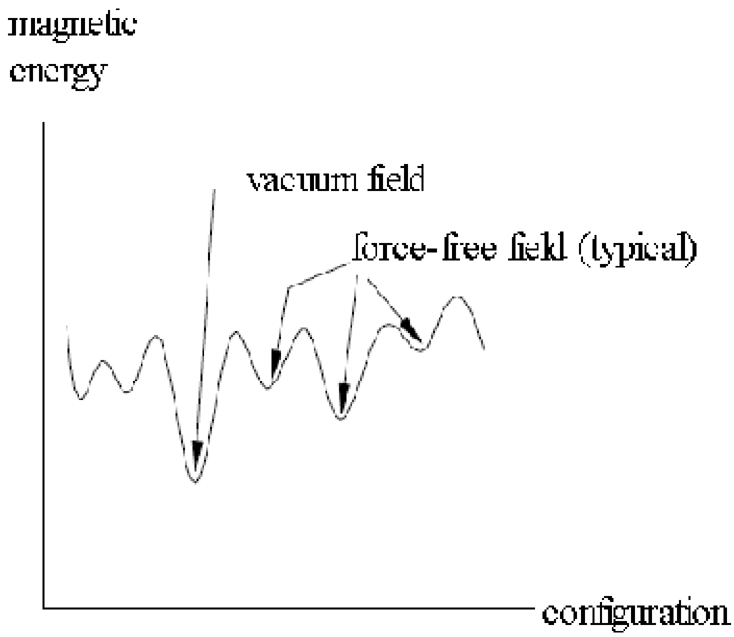
$$\int_v \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_{\min} \mathrm{d}^3 r = 0 \tag{9.8}$$

ليس مهما كيف نختار δB. باستخدام $\delta B = \nabla \times \delta A$ والمتجه $\nabla. (A\times B) = B\cdot \quad \times A - A\cdot \quad \times B$، المعادلة (8.9) يمكن أن تكامل بالتجزئة لنحصل على

$$\int_V [\nabla \cdot (\delta\mathbf{A} \times \mathbf{B}_{\min}) + \delta\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}_{\min}] \, \mathrm{d}^3 r = 0. \tag{9.9}$$

الحد الأول يمكن أن يتحول إلى تكامل سطحي على السطح S باستخدام نظرية جاوس. وهذا وسطح التكامل يتلاشى لان δA يجب أن تتلاشى على السطح الحدي (تذكر إن التغير يحقق نفس الشرط الحدي عند اقل طاقة مجال). ولان δB اختيارية داخل V، δA يجب أن تكون اختيارية داخل V وبهذا فان الطريقة الوحيدة للحد الثاني في المعادلة (9.9) ليتلاشى هو أن يكون $\nabla\times B_{min} = 0$. وبهذا، فان B_{min} يجب أن تكون مجال فراغ.

نتيجة طبيعية مهمة وهي: افترض إن الشروط الحدية المحددة على السطح محصورة داخل حجم ما. هذه الشروط الحدية تعتبر قواعد يجب أن تتحقق بحل المعادلات. كل التشكيلات التي تحقق الشروط الحدية المفروضة والتي لها تيار محدود داخل الحجم ليست هي حالة الطاقة الأقل. وعليه فان المجالات غير الفراغية يمكن، من ناحية المبدأ، تمتلك طاقة حرة متاحة للتحكم في الشروط الحدية للحفاظ على عدم الاستقرار



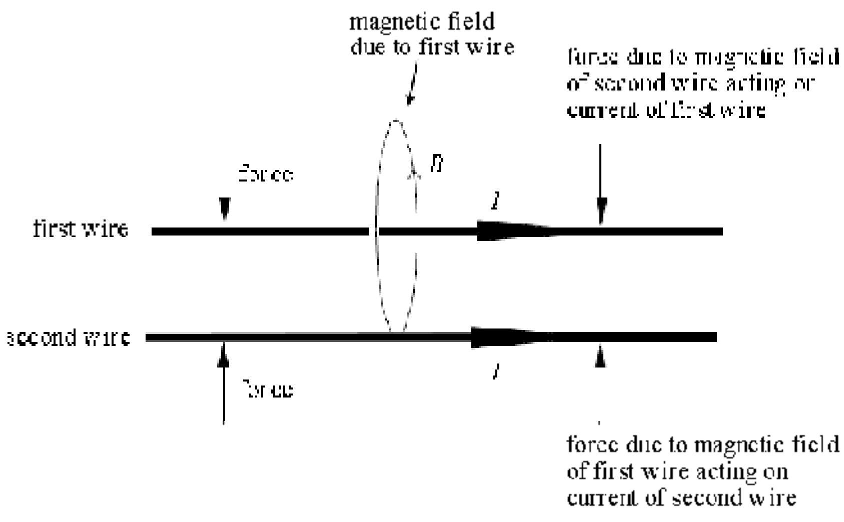
الشكل 2.9 مخطط طاقة المجال المغناطيسي يعتمد على شكل النظام مع شروط حدية محددة. التغير في الشكل يتطابق مع الأشكال المختلفة للتيار الداخلي. أشكال القوة الحرة هي الطاقة الدنيا الموضعية في حين أشكال الفراغ لها القيمة المطلقة الأقل.

3.9 المجالات مهملة القوة

بالرغم من إن مجال الفراغ له اقل طاقة يحقق الشروط الحدية المفروضة، فان التشكيلات الغير فراغية ليس بالضرورة تضمحل إلى اقل مستوى طاقة. وهذا لأنه يوجد مجموعة من تشكيلات الطاقة العالية التي يضمحل النظام لها، وهذه تعرف باسم مستويات القوة المهملة force-free states. التيار لا يساوي صفر في مستوى القوة المهملة ولكن المجال المغناطيسي يكون صفر لان كثافة التيار في كل مكان توازي المجال المغناطيسي. وعليه فان $J \times B$ يتلاشى بالرغم من إن كلا من J و B ذو قيمة محدودة.

إذا كانت البلازما في البداية في حالة مستوى القوة الغير مهملة وتتطور بعد ذلك إلى حالة مستوى القوة المهملة فإنها تصبح ملتصقة في المستوى القوة المهملة لأنه لا يكون هناك قوى تعمل على تغير حالة الاتزان.

الطاقة المغناطيسية للمجال ذات القوة المهملة ليس هي الطاقة المطلقة الدنيا للشروط الحدية المحددة، ولكن القيمة الدنيا لأي تشكيل في الفراغ موضح في الشكل 2.9. هذه السلسلة من المستويات هي تشابه إلى حدا ما المستويات في نظام مكمم ومجال الفراغ يشابه المستوى الأرضي ومستويات القوة المهملة هي مستويات طاقة عالية مكممة.

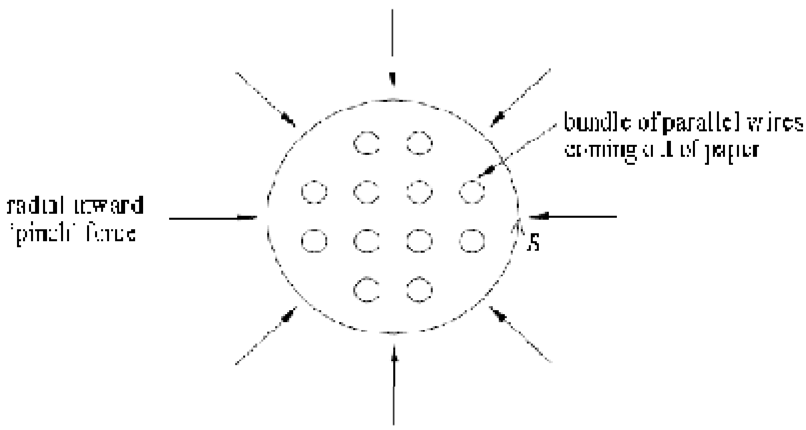


الشكل 3.9 تيارات متوازية تجذب بعضها البعض

4.9 الضغط والشد المغناطيسي

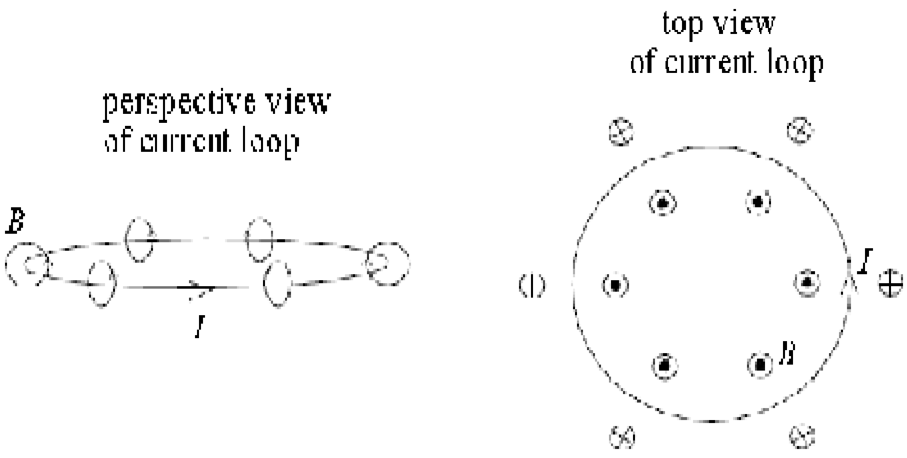
يمكن أن نحصل على رؤية أكثر فائدة من خلال اعتبار القوة بين سلكيين متوازيين يمر فيهما تيار كما في الشكل 3.9. حساب المجال المغناطيسي B عند احد السلكيين الناتج عن التيار المار في السلك الأخر يوضح أن $J \times B$ قوة تدفع السلكيين باتجاه بعضهما البعض، أي أن التيارين المتوازيين يجذبان بعضهما البعض. وبالمقابل التيارات المتوازية والمتعاكسة تتنافر مع بعضها البعض. وحزمة من الأسلاك المتوازية الموضحة في الشكل 4.9 سوف يتولد بينهم جذب متبادل مما ينتج عن ذلك قوة صافة تعمل على تقليل قطر الحزمة. كما يمكن أن نستبدل الحزمة بتيار موزع بحيث ينقل التيار بواسطة بلازما اسطوانية ذات نصف قطر محدود. وهذا ينكمش للداخل بتأثير قوة تعرف باسم ضغطة القوة pinch force أو باسم تأثير الضغطة pinch effect.

يمكن أن نتصور قوة الضغطة كما لو إنها قوة شد tension في المجال المغناطيسي المداري والذي يلتف حول التيار الموزع. وتوسيع هذا الافتراض المجازي فان المجال المغناطيسي المداري يمكن تصوره على انه يعمل كحزمة مرنة elastic band والتي تطوق وتحيط التيار الموزع وتضغط أو تضغط التيار إلى قطر اقل. هذا المبدأ متوافق مع حالة مغناطيسيين دائمين يجذبان بعضهما البعض عندما يكون القطبين الشمالي والجنوبي يواجهان بعضهما البعض. خطوط المجال المغناطيسي تنطلق من القطب الشمالي لأحد المغناطيسيين إلى القطب الجنوبي للمغناطيس الأخر وهكذا يمكن أن نقول إن قوة التجاذب بين المغناطيسيين هي قوة شد في خطوط المجال على امتداد الفجوة بينهما.



الشكل 4.9 حزمة من التيارات تجذب بعضها البعض، وتعطي قوة ضاغطة قطرية إلى الداخل

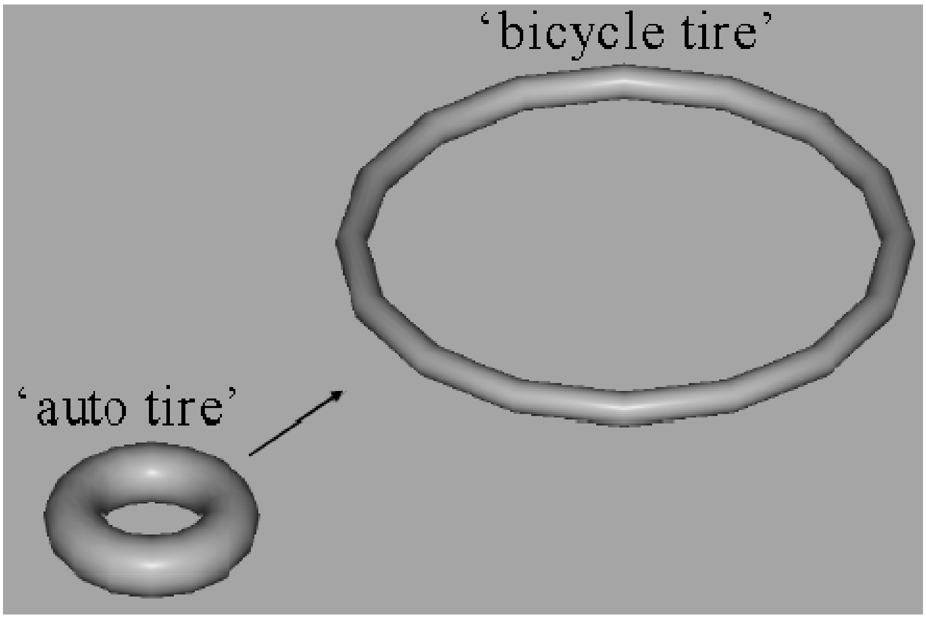
الآن لنعتبر تيار يمر في حلقة مثل ما هو موضح في الشكل 5.9. ولان التيارات متعاكسة على جانبي الحلقة، فان هناك قوة تنافرية بين عناصر التيار عند كل نقطة وعنصر التيار عند الجانب الأخر للحلقة. والنتيجة النهائية هو قوة تعمل على تمدد قطر الحركة. هذه القوة تعرف باسم قوة الطوق hoop force أو جهد الطوق hoop stress. من الممكن أن نفسر قوة الطوق بشكل مجازي من خلال إدخال مفهوم الضغط المغناطيسي. وكما في الشكل 5.9، خطوط المجال المغناطيسي المرتبطة بالتيار تكون أكثر كثافة في داخل الحلقة من خارجها، هذا تأثير هندسي ناتج عن التقوس في مسار التيار الكهربي. ولان شدة المجال المغناطيسي تتناسب طرديا مع كثافة خطوط المجال، فان المجال المغناطيسي في الداخل سيكون اكبر منه في الخارج، بمعنى إن B^2 أقوى في الداخل من الخارج. المجال المغناطيسي في مستوى الحلقة عمودي على المستوى ويمكن شرح قوة الطوق من خلال تحديد ضغط مغناطيسي يتناسب مع B^2 وتعمل في اتجاه عمودي على B. ولان B^2 أقوى في داخل الحلقة من خارجها، فان الضغط المغناطيسي الداخلي اكبر. القوة الخارجية الناتجة عن اختلال توازن الضغط متوافقة مع قوة الطوق.



الشكل 5.9 رسم منظوري ومشهد علوي للمجالات المغناطيسية المتولدة بواسطة حلقة تيار كهربي

من الممكن أن نتخيل التأثير المركب للضغط المغناطيسي وقوة الشد من خلال حلقة التيار الكهربي حيث إنها موصلة وبقطر محدد. افترض إن هذه الحلقة في البداية لها صلة بإطار سيارة، كما في الشكل 6.9. قوة الطوق سوف تعمل على جعل قطر الحلقة يزداد، في حين إن قوة الضغطة سوف تعمل على

جعل قطر الحلقة يتناقص. والنتيجة النهائية هي قوة مركبة تعمل على إطار السيارة يتحول بشكل متناسب إلى إطار دراجة (قطر رئيسي كبير، وقطر ثانوي صغير)



الشكل 6.9 القوة المغناطيسية تعمل على نقل تيار الحلقة السميكة والصغيرة إلى الحلقة الكبيرة

5.9 تنسور الإجهاد المغناطيسي

إن وجود الضغط المغناطيسي وقوة الشد توضح إن القوة المغناطيسية تختلف في الاتجاهات المختلفة، وكذلك القوة المغناطيسية يجب أن تميز بواسطة تنسور الإجهاد الغير متماثل. ولكي ننشئ هذا رياضيا، فان المتجه التعريفي $\nabla B^2/2 = B\cdot\nabla B + B\times\nabla\times B$ يساعد في إيجاد القوة المغناطيسية لنعبر عنها بالشكل التالي:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}\times\mathbf{B} &= \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0}\left[-\nabla\left(\frac{B^2}{2}\right)+\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{B}\right] \\ &= -\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left[\frac{B^2}{2}\mathbf{I}-\mathbf{BB}\right] \qquad (9.10)\end{aligned}$$

حيث I هي تنسور الوحدة والعلاقة $\nabla.(BB) = (\nabla.B)B + B.\nabla B = B.\nabla B$ استخدمت. وعند أي نقطة r يمكن أن نعرف نظام الإحداثيات الكارتيزية بحيث يكون المحور z موازي للقيمة الموضعية للمجال B وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (1.9) على النحو التالي:

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U}\right] = -\nabla\cdot\begin{bmatrix} P+\frac{B^2}{2\mu_0} & & \\ & P+\frac{B^2}{2\mu_0} & \\ & & P-\frac{B^2}{2\mu_0}\end{bmatrix} \qquad (9.11)$$

مرة أخرى نؤكد على إن المجال المغناطيسي يعمل مثل الضغط في الاتجاهات العرضية على المجال B (أي الاتجاهات x و y في النظام الكارتيزي الموضعي) ومثل قوة الشد في الاتجاه الموازي للمجال B. في حين إن التفسير المبين أعلاه مفيد جدا، ويمكن أن يكون مضللا عند استخدامه لان من الممكن أن يفسر ضمنيا وجود القوة في اتجاه B عندما في الواقع لا يوجد قوة لان J ×B بوضوح لا تمتلك مركبة في اتجاه B. وبطريقة أكثر دقة لتوضيح العلاقة بين الضغط المغناطيسي وقوة الشد هو أن نعيد ترتيب السطر الثاني في المعادلة (10.9) على النحو التالي:

$$\mathbf{J}\times\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}\left[-\nabla\left(\frac{B^2}{2}\right)+B^2\hat{B}\cdot\nabla\hat{B}+\hat{B}\hat{B}\cdot\nabla\left(\frac{B^2}{2}\right)\right] = \frac{1}{\mu_0}\left[-\nabla_\perp\left(\frac{B^2}{2}\right)+B^2\kappa\right] \qquad (9.12)$$

أو

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}\left[-\nabla_\perp\left(\frac{B^2}{2}\right) + B^2\boldsymbol{\kappa}\right]. \tag{9.13}$$

وهنا

$$\boldsymbol{\kappa} = \hat{B}\cdot\nabla\hat{B} = -\frac{\hat{R}}{R} \tag{9.14}$$

هو قياس لانحناء المجال المغناطيسي عند نقطة على خط المجال وR هي متجه نصف القطر الموضعي للانحناء. المتجه R يتجه من مركز الانحناء نقطة محددة على خط المجال. الحد k في المعادلة (13.9) يصف القوة التي تعمل على تقويم المجال المنحنى وبدقة أكثر هذا الحد يصف خط مجال الشد (تذكر إن الشد يعمل بالمثل على تقويم الانحناء). أما الحد الذي يتضمن $\nabla_\perp B^2$ يصور القوة المغناطيسية الناتجة عن تدرج الضغط العمودي على المجال المغناطيسي وبتعبير أكثر دقة هو قوة الطوق.

في نقاشنا السابق وضحنا إن مجال الفراغ المغناطيسي يكون اقل مستوى طاقة في كل المجالات التي تحقق الشروط الحدية الموضوعة. يمكن أن يكون مجال الفراغ منحني لبعض الشروط الحدية (على سبيل المثال المغناطيس الدائم بأبعاد محدودة) وفي مثل هذه الحالة الحدين في المعادلة (13.9) كلاهما محدود ولكنهما يلغيا بعضهما البعض. ويمكننا أن نفكر في مستوى الطاقة الدنيا لأي شروط حدية معطاة على إنها تناظر حالة اتزان نظام مكون من خرطوم (تيوب) مطاطي قاسي والذي اخذ شكل مجال الفراغ المغناطيسي وطرفيه مثبتان عند السطح المحدد. التيارات سوف تجعل شكل هذا النظام يحيد عن حالة الاتزان، ولكن لان أي تغير في الشكل يتطلب بذل شغل على النظام، فان التيارات المتغيرة تجعل النظام موجودا في مستوى طاقة أعلى.

6.9 حفظ الفيض، والطاقة الدنيا والحث

طريقة مفيدة أخرى لفهم سلوك المجال المغناطيسي هي دراسة علاقته مع حث الدائرة الكهربية. الحث الذاتي L لعناصر الدائرة الكهربية يعرف على انه الفيض المغناطيسي Φ الذي يربط العنصر مقسوما على التيار I المار في العنصر، أي أن

$$L = \frac{\Phi}{I}. \qquad (9.15)$$

لنفترض دائرة بها ملف يمر فيه تيار كهربي I في حيز محدود حجمه V ولنفترض إن C تشير إلى أثار الكونتور ثلاثي الأبعاد للسلك المكون للملف. والفيض المغناطيسي الكلي للفات الملف يمكن التعبير عنه بالمعادلة التالية:

$$\Phi = \int \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int \nabla\times\mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \qquad (9.16)$$

حيث التكامل السطحي على كل مساحة العناصر الكهربية في الدائرة المرتبطة بالملف. الطاقة الموجودة في المجال المغناطيسي والناتجة من الملف هي على النحو التالي:

$$\begin{aligned} W &= \int_V \frac{B^2}{2\mu_0}\mathrm{d}^3r \\ &= \frac{1}{2\mu_0}\int_V \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A}\,\mathrm{d}^3r. \end{aligned} \qquad (9.17)$$

ولكن، باستخدام تعريف المتجه $\nabla\cdot(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) = \mathrm{B}.\nabla\times\mathrm{A} - \mathrm{A}.\nabla\times\mathrm{B}$ فان الطاقة المغناطيسية تصبح على النحو التالي:

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int_V \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}\,\mathrm{d}^3r + \frac{1}{2\mu_0}\int_{S_\infty} \mathrm{d}\mathbf{s}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B} \qquad (9.18)$$

حيث تم استخدام قانون جاوس للحصول على الحد الثاني، التكامل على السطح اللا محدود S_∞. والتكامل السطحي يتلاشى لان (i) المجال المغناطيسي اللا محدود يجب أن يتراجع على الأقل بسرعة ثنائي القطب، أي إن $B \sim R^3$ حيث R المسافة من نقطة الأصل، (ii) مقدار متجه الجهد A يقاس بمقدار تكامل B أي ان $A \sim B^2$، و(iii) والسطح في المالانهاية يقاس بـ R^2.

باستخدام قانون أمبير يمكن كتابة المعادلة (18.9) على النحو التالي:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{A}\cdot\mathbf{J}\mathrm{d}^3r. \qquad (9.19)$$

على كل حال، J تكون محددة فقط في سلك الملف ولهذا فان التكامل يصبح تكامل حجمي للسلك. يمكن ان نعبر عن عنصر الحجم للسلك بالمعادلة $d^3r = ds.dl$ حيث dl عنصر الطول على امتداد السلك، وds مساحة مقطع السلك. ولان J و dl متوازيان، فانه من الممكن تبديلهما في المعادلة (19.9) والتي تصبح على النحو التالي:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_{V_{coil}} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}\,\mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} \\ &= \frac{I}{2}\oint \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \\ &= \frac{I\Phi}{2} \\ &= \frac{\Phi^2}{2L} \\ &= \frac{1}{2}LI^2 \qquad (9.20) \end{aligned}$$

حيث J.ds=I هي التيار الذي يمر في السلك. وعليه، فان الطاقة المختزنة في المجال المغناطيسي والناتجة من الملف هي طاقة حثيه في الملف.

إذا كان الملف يشكل دائرة متصلة تماما فان الفيض يجب أن يكون محفوظا وإذا كان هناك تغير في الفيض، فان جهد كهربي سوف ينشأ على طرفي الملف. التيار المغلق المار في البلازما الموصلة تكافئ ملف مغلق يمر فيه تيار كهربي وعليه فان البلازما الموصلة يمكن أن تعتبر كحافظة للفيض.

إذا كان الفيض محفوظا أي أن $\Phi = \text{const}$، فان المعادلة الثانية من السطر الأخير في المعادلة (20.9) تبين إن الطاقة المغناطيسية للنظام سوف تنخفض بإعادة ترتيب طبولوجيا الدائرة بما يعمل على زيادة الحث الذاتي.

يمكن اعتبار البلازما الساخنة حافظة فيض جيدة بسبب الموصلية الكهربية العالية. ولهذا أي زيادة في الحث يعمل على تغير طبولوجيا تيارات البلازما وسوف تتحرر طاقة يمكن استخدامها في التحكم في الاستقرار. ولان القوة تعمل على تقليل طاقة وضع النظام، فان القوة المغناطيسية الناتجة عن التيار المار في البلازما سوف يعمل على زيادة الحث الذاتي. ومن الممكن أن نكتب إن القوة F ناتجة عن التغير في الفيض المحافظ في الحث L على النحو التالي:

$$\mathbf{F} = -\frac{\Phi^2}{2}\nabla\left(\frac{1}{L}\right). \qquad (9.21)$$

ضغطة القوة متفقة مع هذا التفسير لان حث الموصل يتناسب عكسيا مع نصف القطر. وقوة الطوق أيضا متفقة مع هذا التفسير لان الحث لحلقة التيار تزداد بزيادة نصف قطر الحلقة. ويمكن أن نشرح سلوكا أكثر تعقيدا، خصوصا عند حدوث خلل في الاستقرار، فيما بعد. في حالة حدوث خلل في الاستقرار يكون التيار الابتدائي يمر في صورة خط مستقيم ثم يتحول إلى مسار حلزوني. ولان الملف الحلزوني يمتلك حث اكبر من حالة السلك المستقيم، فان تأ ُثير خلل الاستقرار يعمل على زيادة الحث الذاتي للدائرة.

7.9 الاتزان الديناميكي مقابل الاتزان الساكن

عرفنا (i) الاتزان الساكن بأنه هو حل الزمن المستقل للمعادلة (1.9) والتي لا تمتلك سرعة تدفق و(ii) الاتزان الديناميكي كحل بسرعات تدفق في حالة الاستقرار. ولهذا فان U=0 في حالة الاتزان الساكن

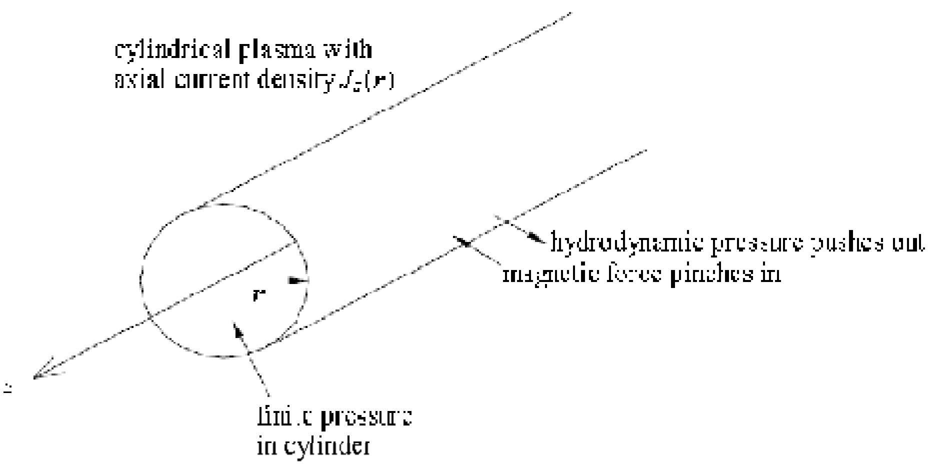
في حين U محدودة ومستقرة في حالة الاتزان الديناميكي. وللاتزان الساكن تصبح معادلة MHD مختزلة في الصورة التالية:

$$\nabla P = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \qquad (9.22)$$

وللاتزان الديناميكي فان معادلة MHD تختزل في الصورة التالية:

$$\rho \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \rho \nabla^2 \mathbf{U} \qquad (9.23)$$

حيث إن الحد الأخير يمثل الإخماد اللزج و v اللزوجة. وبأخذ الـ curl للمعادلتين الأخيرتين سوف نلاحظ في حالة الاتزان الساكن فان القوة المغناطيسية يجب أن تكون محفوظة أي إن $\nabla \times (J \times B) = 0$ في حين إن الاتزان الديناميكي تكون القوة المغناطيسية غير محفوظة لان في الحالة العامة $\nabla \times (J \times B) \neq 0$. وعليه تكون خاصية المجال المغناطيسي مختلفة نوعا ما في كلتا الحالتين. الاتزان الساكن مناسب لأجهزة حصر البلازما مثل tokamaks و stellarators وreversed field pinches و spheromaks في حين إن الاتزان الديناميكي يكون مناسب في حالة التفريغ الكهربي والمحركات النفاثة والمجنيتوهيدروديناميك، ولكن قد تكون مناسبة أيضا للـ tokamaks والى أخره، إذا كان هناك تدفق. كلا حالتي الاتزان الساكنة والديناميكية تحدث في فراغ البلازما.



الشكل 7.9 هندسة الـ Bennett pinch

8.9 الاتزان الساكن

1.8.9 الاتزان الساكن في بعدين: Bennett pinch

أول من اكتشف ابسط اتزان ساكن العالم Bennett في العام 1934 وأطلق عليه اسم Bennett pinch أي ضغطة Bennett أو z-pinch (وz هنا تشير إلى اتجاه التيار). التشكيلة الموضحة في الشكل 7.9، تتكون من عدد لا نهائي من البلازما اسطوانية متماثلة على طول محورها بكثافة تيار كهربي محوري $J_z = J_z(r)$ ولا يوجد أي تيارات كهربية أخرى.

التيار المحوري يسري داخل دائرة نصف قطرها r يكون على النحو التالي:

$$I(r) = \int_0^r 2\pi r' J_z(r') \mathrm{d}r' \qquad (9.24)$$

وكثافة التيار المحوري ترتبط بتكامل هذا التيار من خلال المعادلة التالية:

$$J_z(r) = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial I}{\partial r}. \qquad (9.25)$$

وحيث إن قانون أمبير يعطى على النحو التالي:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}, \qquad (9.26)$$

المعادلة 22.9 يمكن أن تكتب على النحو التالي:

$$r^2\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{8\pi^2}\frac{\partial I^2}{\partial r}. \qquad (9.27)$$

بتكامل المعادلة 27.9 من r=0 إلى r=a، حيث a هي نصف القطر الخارجي للبلازما الاسطوانية، تعطي العلاقة التالية:

$$\int_0^a r^2 \frac{\partial P}{\partial r} \mathrm{d}r = \left[r^2 P(r)\right]_0^a - 2\int_0^a r P(r) \mathrm{d}r = -\frac{\mu_0 I^2(a)}{8\pi^2}. \qquad (9.28)$$

الحد ذو التكامل يتلاشى عند كلا من r=0 و r=a لان P(a) = 0 بالتعريف. وإذا كانت درجة الحرارة منتظمة، فان الضغط يمكن أن نعبر عنه بـ P(r) = n(r)κT وبالتالي فان المعادلة (28.9) يمكن أن نعبر عنها بالشكل التالي:

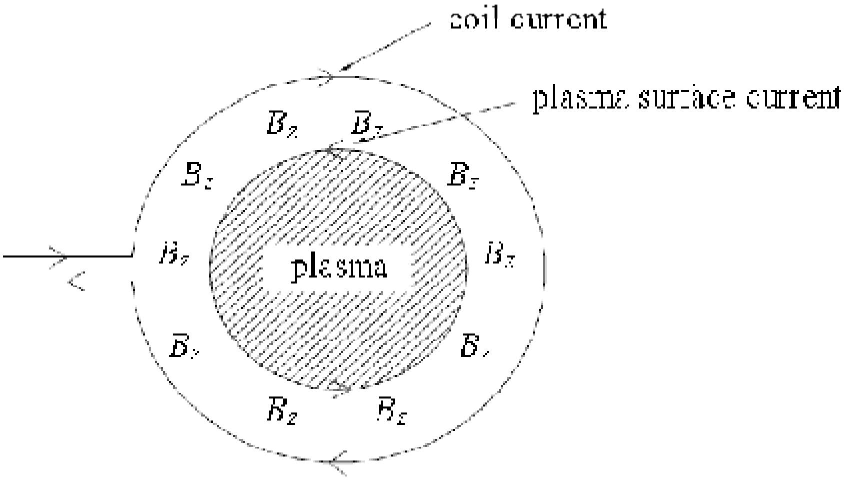
$$I^2 = \frac{8\pi N \kappa T}{\mu_0} \qquad (9.29)$$

حيث إن $N = \int_0^a n(r) 2\pi r \mathrm{d}r$ تمثل عدد الجسيمات لكل طول محوري. المعادلة (29.9) تعرف باسم علاقة Bennett، وتبين لنا مقدار التيار اللازم لحصر عدد من N، و T هي مستقلة عن تفاصيل الكثافة الداخلية. هذه العلاقة تصف ابسط توازن MHD وتقترح بأنه بالإمكان لتيار بسيط أن يحصر بلازما ذات ضغط كبير. هذه العلاقة شجعت لتصميم أجهزة حصر نووي مغناطيسي ولكن كما سوف نرى فيما بعد إن هذا الاقتراح تفاؤلي أكثر من اللازم لان اتزان z-pinch اتضح انه بعيد جدا عن حالة الاستقرار.

الحصر باستخدام التيارات المتدفقة في الاتجاه المداري azimuthal ممكنة أيضا ، ولكن هذه التشكيلة، تعرف باسم θ-pinch، وهي بالأساس مؤقتة. في θ-pinch يتغير التيار المداري بسرعة في الملف المار حول البلازما الاسطوانية ويعمل مجال مغناطيسي B_z مؤقت كما هو موضح في الشكل 8.9. ولان البلازما موصلة فإنها تحافظ على الفيض المغناطيسي، والمجال المؤقت B_z لا يستطيع أن يخترق البلازما وبالتالي فانه محصور في منطقة الفراغ بين البلازما والملف. هذا الاستثناء للمجال B_z بواسطة البلازما يتطلب وجود تيار مداري مستحث في سطح البلازما والذي يعمل على إنشاء مجال مغناطيسي في داخل البلازما يلغي تماما المجال المؤقت B_z الناتج في الملف.

قوة الحصر القطرية تنتج من القوة الداخلية القطرية $J \times B = J_\theta \hat{\theta} \times B_z \hat{z}$ حيث B_z هو المجال المغناطيسي المرتبط بالتيار في الملف و J_θ هي التيار السطحي في البلازما. وبطريقة أخرى ولكنها مكافئة هو إن التيارات المعاكسة تبعد التيار المداري في الملف، فان دفع البلازما إلى الداخل ومن ثم

معادلة القوة الخارجية تحت ضغط البلازما. وتشكيلة θ-pinch مطلوبة مؤقتا لان التيار السطحي المستحث لا يمكن أن يدعم حالة الاستقرار.



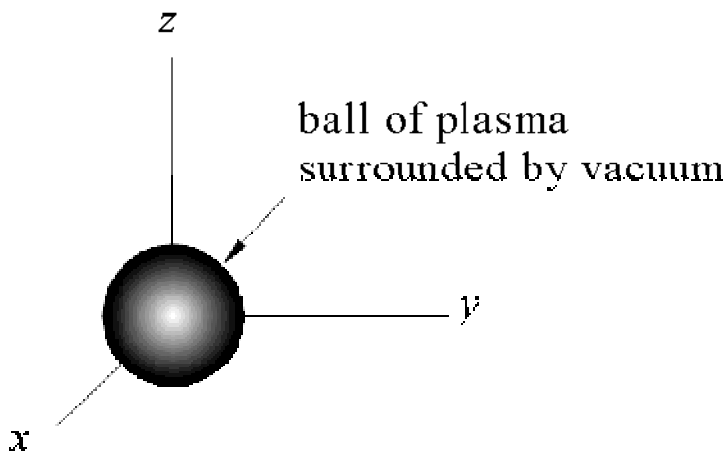
الشكل 8.9 تشكيلة θ-pinch. التغير السريع في التيار المداري يحدث تيار مداري معاكس ومساوي لتيار البلازما السطحي. ضغط المجال B_z بين هذين المجالين يدفع البلازما ويحصرها.

2.8.9 تعذر الحصر الذاتي للتيار في البلازما في الأبعاد الثلاثة: نظرية virial

تحليل Bennett يوضح إن التيارات المحورية تسري في اسطوانة بلازما ذات طول لانهائي تولد قوة ضغطة pinch force تعمل على حصر بلازما ذات ضغط محدود. وقوة الضغطة في اتجاه الدخول تعادل القوة في اتجاه الخروج المرتبطة بتدرج الضغط. السؤال الآن هو هل من الممكن أن النتيجة الثنائية الأبعاد يمكن أن توسع إلى الأبعاد الثلاثة، أي إن هل من الممكن أن البلازما ذات ضغط محدود أن تكون ثلاثية الأبعاد، كما هو موضح في الشكل 9.9، حيث إنها محصورة بالكامل بواسطة التيارات التي تسري في البلازما؟ ولنكن أكثر تحديدا، فانه من الممكن أن يكون لدينا بلازما كروية ذات نصف قطر محدود محاطة بالفراغ حيث يكون حصر البلازما ذات الضغط المحدود ناتج عن القوة

المغناطيسية للتيارات التي تسري في البلازما، بمعنى هل بالإمكان أن تمسك البلازما نفسها؟ الإجابة المدوية هي "لا"، حسب نظرية virial بسبب Shafranov (1966).

نظرية virial مناسبة لإجراء التكامل على كامل النظام وتحتوي على معلومات عن كيف خاصية واسعة الانتشار مثل الطاقة أن تتجزأ في النظام. على سبيل المثال، في الميكانيكا نظرية virial يمكن أن تكون متوسط الزمن للجهد أو الطاقة الحركية.



الشكل 9.9 كرة بلازما بضغط محدود محاط بالفراغ.

نظرية virial للـ MHD تم الحصول عليها بافتراض إن الحصر الذاتي موجود وكذلك تبين أن هذا يؤدي إلى تعارض.

لذلك فإننا سوف نسلم بوجود بلازما كروية ذات الخصائص التالية:

(1) البلازما لها نصف قطر محدد ومحاطة بالفراغ،
(2) البلازما في حالة توازن MHD ساكن،
(3) البلازما لها ضغط داخلي محدود وتدرج الضغط متوازن مع القوى المغناطيسية الناتجة عن التيارات التي تسري في البلازما، أي انه لا يوجد تيارات في منطقة الفراغ المحيطة بالبلازما.

باستخدام المعادلتين (10.9) و (11.9) فان اتزان MHD الساكن يمكن التعبير عنه على النحو التالي:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \qquad (9.30)$$

حيث إن التنسور T يعرف من خلال المعادلة التالية:

$$\mathbf{T} = \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)\mathbf{I} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{BB}. \qquad (9.31)$$

لنفترض إن $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ تكون المتجه من مركز البلازما إلى نقطة الدراسة.

لنعتبر معادلة virial

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}) &= \sum_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j}(T_{jk} x_k) \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{r} + \sum_{jk} T_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} x_k \qquad (9.32) \\ &= \text{Trace } \mathbf{T} \end{aligned}$$

حيث $\mathbf{T} = \sum_{jk} T_{jk}\delta_{jk}$. ومن المعادلة (31.9) (أو المكافئة من المصفوفة في المعادلة (11.9)) نرى ان

$$\text{Trace T} = 3P + B^2/2\mu_0$$

موجبة بالتأكيد.

سوف نقوم الآن بتكامل طرفي المعادلة (31.9) على كل الفراغ. ولان الطرف الأيمن من المعادلة (32.9) موجبا، فان التكامل للطرف الأيمن على كل الفراغ يكون محدودا وموجبا. والتكامل للطرف الأيسر يمكن ان يتحول إلى تكامل سطحي عند المالانهاية باستخدام نظرية جاوس.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3 r \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}) &= \int_{S_\infty} \mathrm{ds} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{r} \\ &= \int_{S_\infty} \mathrm{ds} \cdot \left[\left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{I} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{BB} \right] \cdot \mathbf{r} \ .\end{aligned} \tag{9.33}$$

ولأننا افترضنا إن البلازما لها امتداد محدود، P يساوي صفر على السطح في المالانهاية.

المجال المغناطيسي يمكن أن يتوسع عند الأقطاب المتعددة مع إن الأقطاب المتعددة ذات الرتبة الدنيا هي ثنائي قطب. والمجال المغناطيسي لثنائي القطب يقاس بـ r^3 لقيم r الكبيرة في حين إن مساحة السطح $\int ds$ تقاس بـ r^2. وعليه فان الطرف الأيسر يقاس بـ $\int dsB^2 r \sim r^{-3}$ ويتلاشى عندما $r\rightarrow\infty$. وهذا يتناقض مع الطرف الأيمن الذي يكون موجبا وكذلك مجموعة الافتراضات الابتدائية يجب أن تكون غير صحيحة. وعليه فانه لأي امتداد محدود، ثلاثي الأبعاد، فان اتزان البلازما الساكن يجب أن يتضمن على الأقل بعض التيارات خارج البلازما. الامتداد المحدود، ثلاثي الأبعاد للبلازما الساكنة من الممكن أن توجد فقط في حالة اتزان إذا كان على الأقل بعض من المجال المغناطيسي ناتج بواسطة التيارات في الملفات خارج البلازما والتي تثبت في المكان بوساطة بعض التراكيب الميكانيكية. إذا كانت الملفات مدعمة بتراكيب ميكانيكية، فان التيار في الملفات يمكن اعتباره جزء من بلازما MHD ونظرية virial سوف تنتهك. وخلاصة القول، التمدد المحدود لبلازما ثلاثيته الأبعاد في اتزان ساكن مع الضغط الهيدروديناميكي الداخلي المحدود P يجب أن يحتوي على جسم خارجي ملموس ليدفع ضد أو في الاتجاه المعاكس. والدعم المتوفر من خلال القوى المغناطيسية يعمل بين التيارات في الملفات الخارجية والتيارات في البلازما.

3.8.9 اتزان ساكن ثلاثي الأبعاد: معادلة Grad-Shafranov

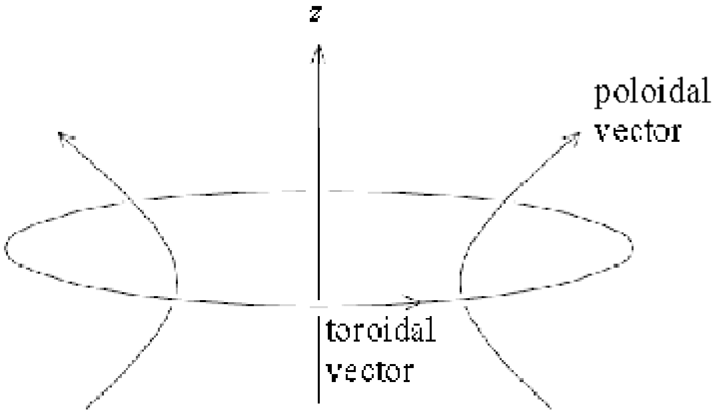
بالرغم من الظهور البسيط للمعادلة (22.9)، إلا إن الحل في الأبعاد الثلاثة أمرا صعبا. وقبل أن نحاول إيجاد الحل، فانه من المهم أن نقرر الطريقة الأنسب لعرض المشكلة، بمعنى انه من المفترض أن نقرر أي الكميات سوف نصف وأي منها يجب أن نجد حلا لها. على سبيل المثال، من الممكن أن نتخيل وصف للضغط P(r) وبعد ذلك نستخدم المعادلة (22.9) لتحديد المجال المناظر B(r) المرتبط بالتيار J(r)، والخيار البديل أن نفترض وصف لـ B(r) وبعد ذلك نستخدم المعادلة (22.9) لتحديد P(r).

لسوء الحظ، أيا من هذه الطرق تعمل لان الحل للمعادلة (22.9) يوجد فقط لمجموعة محدودة جدا من الدوال.

السبب لماذا مجال مغناطيسي اختياري لا يمكن أن يكون محددا هو إن $\nabla \times \nabla P = 0$ دائما صحيح بقوة الرياضيات حيث إن $\nabla \times (J \times B) = 0$ صحيحة فقط لأنواع محددة من B(r). كما انه من الصحيح أن ضغط الاتزان الاختياري P(r) لا يمكن أن يوصف (انظر التمرين #2 حيث توضح انه لا يوجد $J \times B$ يمكن أن تحصر ضغط متماثل كرويا). وعليه فان الاتزان يوجد فقط لحالات محددة، وهذه الحالات تتطلب تماثل في بعض اتجاه ما. سوف نقوم الآن باختبار مثال ذو أهمية كبيرة، وهو الاتزان الساكن ذو التماثل المداري حول المحور (المحور z). هذا التماثل ينطبق على الكثير من أجهزة الحصر المغناطيسية المستخدمة في أبحاث الاندماج المغناطيسي، مثل tokamaks و reversed field pinches و spheromaks و field reversed theta pinches.

سوف نبدأ عملية التحليل بافتراض تماثل مداري حول محور z في نظام الإحداثيات الاسطوانية r, φ, z بحيث إن أي كمية فيزيائية f لها خاصية $\partial f/\partial \varphi = 0$.

ولان المعادلة $\nabla \times \nabla \varphi = 0$، فان المعالجة الجبرية تصبح بسيطة جدا إذا كانت المتجهات في اتجاه φ توصف بالحدود $\nabla \varphi = \hat{\varphi}/r$ بدلا من $\hat{\varphi}$. وكما هو موضح في الشكل 10.9 فان الحد الحلقي toroidal يشير إلى الاتجاه φ (على الامتداد حول torus (نتوء مستدير)) والحد poloidal يشير إلى المتجهات في المستوى r-z.



الشكل 10.9 المتجهات الحلقية والمتجهات poloidal

الشكل الأكثر عمومية هو المجال المغناطيسي المتماثل حول المحور والي يكون على النحو التالي:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi}\left(\nabla\psi \times \nabla\phi + \mu_0 I \nabla\phi\right). \qquad (9.34)$$

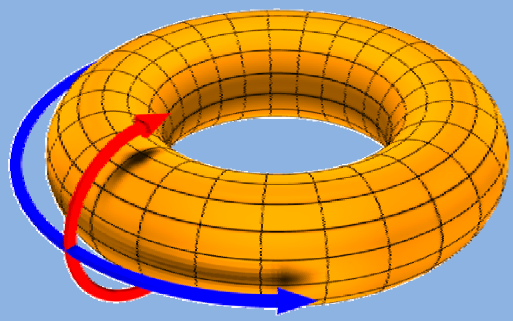
تعرف $\psi(r,z)$ باسم الفيض الحلقي poloidal flux و $I(r,z)$ هو التيار المرتبط بدائرة نصف قطرها r من المركز على المحور z. المجال المغناطيسي الحلقي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{B}_{tor} = B_\phi \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\nabla\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi} \qquad (9.35)$$

وهذا يبين إن الدالة في المعادلة (34.9) متفقة مع قانون أمبير $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$.

المجال المغناطيسي الـ poloidal هو

$$\mathbf{B}_{pol} = \frac{1}{2\pi}\left(\nabla\psi \times \nabla\phi\right). \qquad (9.36)$$



شكل يوضح الفرق بين المجال المغناطيسي الحلقي (الخط باللون الأزرق) والمجال المغناطيسي الـ poloida (الخط باللون الأحمر) (هذا الشكل من خارج الكتاب وقد أدرج لتوضيح الفرق)

تكامل المجال المغناطيسي poloidal على مساحة دائرة نصف قطرها r ومركزها عند المحور z يعطى بالعلاقة التالية:

$$\int_0^r \mathbf{B}_{pol} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^r \frac{1}{2\pi} \nabla\psi \times \nabla\phi \cdot \hat{z} 2\pi r' \mathrm{d}r' = \psi(r, z); \tag{9.37}$$

وبالتالي (r,z) ψ هي فيض poloidal عند الموقع r,z. ويعتمد مبدأ فيض poloidal على وجود التماثل المحوري وبالتالي فان الدائرة التي نصف قطرها r تكون في العادة مرتبطة مع الموضع r,z.

كذلك التماثل المحوري يوفر علاقة مفيدة بين المتجهين الحلقي والـ toroidal. وبالأخص، فان curl المتجه الحلقي هو poloidal لان

$$\nabla \times \mathbf{B}_{tor} = \frac{\mu_0}{2\pi} \nabla I \times \nabla \phi \qquad (9.38)$$

وبالمثل فان curl المتجه poloidal هو المتجه الحلقي لان

$$\nabla \times \mathbf{B}_{pol} = \nabla \times (B_r \hat{r} + B_z \hat{z}) = \hat{\phi} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right). \qquad (9.39)$$

الـ curl المجال المغناطيسي الـ poloidal يكون مؤثر تفاضلي لابلاسيان على ϕ

$$\nabla\phi \cdot \nabla \times \mathbf{B}_{pol} = \nabla \cdot (\mathbf{B}_{pol} \times \nabla\phi) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2\pi} [\nabla\psi \times \nabla\phi] \times \nabla\phi \right) = -\frac{1}{2\pi} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla\psi \right), \qquad (9.40)$$

والعلاقة تنشأ باستخدام العلاقة المتجهة $\nabla.(F \times G) = G.\nabla \times F - F.\nabla \times G$ لان $\nabla \times B_{pol}$ هي حلقية بالكامل

و $\hat{\varphi} = r\nabla\varphi$ وبالتالي من الممكن ان نكتب

$$\nabla \times \mathbf{B}_{pol} = -\frac{r^2}{2\pi} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla\psi \right) \nabla\phi. \qquad (9.41)$$

قانون أمبير ينص على إن $\nabla \times B = \mu_0 J$. وعليه فان من المعادلة (38.9) و المعادلة (41.9) يكون التيارات الحلقية والـ poloidal على التوالي تعطى بالمعادلتين التاليتين:

$$\mathbf{J}_{tor} = -\frac{r^2}{2\pi\mu_0} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla\psi \right) \nabla\phi \qquad (9.42)$$

و

$$\mathbf{J}_{pol} = \frac{1}{2\pi} \nabla I \times \nabla\phi. \qquad (9.43)$$

والآن نحن جاهزون لنقوم بحساب القوة المغناطيسية في المعادلة (22.9). وبعد تحليل المجال المغناطيسي والتيار إلى مركبتين حلقية و poloidal، فان المعادلة (22.9) تصبح على النحو التالي:

$$\nabla P = \mathbf{J}_{pol} \times \mathbf{B}_{tor} + \mathbf{J}_{tor} \times \mathbf{B}_{pol} + \mathbf{J}_{pol} \times \mathbf{B}_{pol}. \qquad (9.44)$$

الحد $J_{pol} \times B_{pol}$ يكون في الاتجاه الحلقي وهو الحد الحلقي الوحيد على الطرف الأيمن من المعادلة. ولكن $\partial P/\partial\varphi = 0$ لان كل الكميات الفيزيائية لا تعتمد على φ وبالتالي $J_{pol} \times B_{pol}$ يجب أن تتلاشى. وهذا يعني إن

$$(\nabla I \times \nabla\phi) \times (\nabla\psi \times \nabla\phi) = 0 \qquad (9.45)$$

والذي يعني أيضا إن ∇I يجب أن توازي $\nabla\psi$. والإزاحة الاختيارية dr تنتج من التغيرات في التيار والفيض poloidal $dI = dr\cdot\ \ I$ و $d\psi = dr\cdot\ \ \psi$ وبالتالي فان

$$\frac{dI}{d\psi} = \frac{d\mathbf{r}\cdot\nabla I}{d\mathbf{r}\cdot\nabla\psi};$$

لان ∇I توازي $\nabla\psi$، فان المشتقة $dI/d\psi$ دائما معرفة. ولها فان I يجب أن تكون دالة في ψ ودائما ممكن أن نكتب

$$\nabla I(\psi) = I'(\psi)\nabla\psi \qquad (9.46)$$

حيث العلامة (′) تعني المشتقة. وبهذا فان تيار poloidal يمكن أن نعبر عنه بدالة فيض poloidal على النحو التالي:

$$\mathbf{J}_{pol} = \frac{I'}{2\pi}\nabla\psi \times \nabla\phi. \qquad (9.47)$$

بالتعويض عن التيارات والمجالات المغناطيسية في المعادلة (44.9) نحصل على المعادلة التالية:

$$\nabla P = \frac{I'}{2\pi}(\nabla\psi\times\nabla\phi)\times\frac{\mu_0 I}{2\pi}\nabla\phi - \nabla\phi\frac{r^2}{2\pi\mu_0}\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\nabla\psi\right)\times\frac{1}{2\pi}[\nabla\psi\times\nabla\phi]$$
$$= -\left[\frac{\mu_0 II'}{(2\pi r)^2}+\frac{1}{(2\pi)^2\mu_0}\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\nabla\psi\right)\right]\nabla\psi. \qquad (9.48)$$

وهذا يعطي نتيجة هامة وهي إن ∇P يجب أن تكون أيضا موازية لـ ∇ψ والتي بدورها تعني إن P = P(ψ) وبالتالي فان ∇P = P′∇ψ. المعادلة (48.9) الآن لها معامل اتجاهي مشترك ∇ψ والذي من الممكن أن يجزأ بحيث إن معادلة المتجه الأصلي تختزل إلى معادلة قياسية

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\nabla\psi\right)+4\pi^2\mu_0 P'+\frac{\mu_0^2}{r^2}II'=0. \qquad (9.49)$$

هذه المعادلة، والتي تعرف باسم معادلة Grad-Shafranov (Grad and Rubin 1958, Shafranov 1966)، لها ميزه وهي إن ψ تظهر في كلا المتغيرات المستقلة والغير مستقلة، أي إن هناك مشتقتين لـ ψ ومشتقتين بالنسبة إلى ψ. والتماثل المحوري ممكنا لتحويل معادلة المتجه ثلاثي الأبعاد إلى معادلة قياسية في بعد واحد. وليس غريبا أن التماثل المحوري يحول النظام الثلاثي الأبعاد إلى نظام ثنائي الأبعاد. ولكن التحويل للنظام ثلاثي الأبعاد إلى نظام ببعد واحد يقترح المزيد من التعمق في الفيزياء وليس الاعتماد على التبسيط الهندسي.

المعادلة Grad-Shafranov يمكن أن نعوض عنها في المعادلة (42.9) لنحصل على

$$\mathbf{J}_{tor}=\left(2\pi r^2 P'+\frac{\mu_0}{2\pi}II'\right)\nabla\phi \qquad (9.50)$$

وبالتالي فان التيار الكلي يمكن أن نعبر عنه على النحو التالي:

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_{pol}+\mathbf{J}_{tor}=\frac{I'}{2\pi}\nabla\psi\times\nabla\phi+\left(2\pi r^2 P'+\frac{\mu_0}{2\pi}II'\right)\nabla\phi=2\pi r^2 P'\nabla\phi+I'\mathbf{B}. \quad (9.51)$$

الحد الأخير يعرف باسم تيار القوة المهملة force-free لأنه يوازي المجال المغناطيسي ولذلك لا يزود بأي قوة. أما الحد الأول على الطرف الأيمن من المعادلة هو تيار الديامغناطيسية.

معادلة Grad-Shafranov هي معادلة غير خطية في ψ، وبصفة عامة، لا يمكن أن تحل بالطرق التحليلية. ولا يمكن أن تحدد بنفسها حالة الاتزان لأنها تتضمن ثلاثة كميات مستقلة هي ψ و $P(\psi)$ و$I(\psi)$. ولهذا نستخدم معادلة Grad-Shafranov لنحدد كميتين من هذه الدوال ونحل بالنسبة للثالث. وعادة الدالتين $P(\psi)$ و $I(\psi)$ تكونا محددتين (إما أن نحددهما من خلال استخدام معادلات أخرى أو من خلال بيانات النتائج العملية في المختبر) وبهذا فان معادلة Grad-Shafranov تستخدم لتحديد ψ.

وبالرغم من ان معادلة Grad-Shafranov يجب أن تحل عدديا، فان هناك يوجد عدد محدد من الحلول التحليلية. هذه يمكن أن تستخدم للأمثلة المثالية التي تعرض خصائص الاتزان المتماثل محوريا. وسوف نقوم الآن بفحص احد هذه الحلول التحليلية، حل Solovev (Solovev 1976).

حل Solovev يحدد من خلال الاستعانة بالفرضيتين التاليتين: الفرضية الأولى تفترض إن الضغط عبارة عن دالة خطية في ψ على النحو التالي:

$$P = P_0 + \lambda\psi \qquad (9.52)$$

والفرضية الثانية تفترض أن I هي ثابت في داخل البلازما بحيث إن

$$I' = 0. \qquad (9.53)$$

الفرضية الثانية تمثل في أن يكون لدينا كل التيارات في الاتجاه z تتدفق على المحور z، وبتالي بعيدا عن المحور z، فان المجال الحلقي هو مجال فراغ (المعادلة (35.9)).

هذا الترتيب يكافئ أن يكون لدينا سلك يمر به تيار نصف قطره صفر ويتجه التيار نحو محور z ويعمل كمصدر للمجال المغناطيسي الحلقي.

تطبيق حل Solovev يستبعد محور z وبالتالي فان المشكلة تكون مشابهة لمشكلة القوة المركزية حيث يكون مصدر القوة المركزية مفردا عند نقطة الأصل. والمنطقة المستبعدة من محور z تناظر الفجوة في

الصامولة لجهاز tokamak. وفي حالة أكثر عمومية حيث I' تكون محددة، فان البلازما إما أن تكون ديامغناطيسية (المجال الحلقي اضعف من مجال الفراغ) أو أن يكون بارامغناطيسية (المجال الحلقي اقوي من مجال الفراغ).

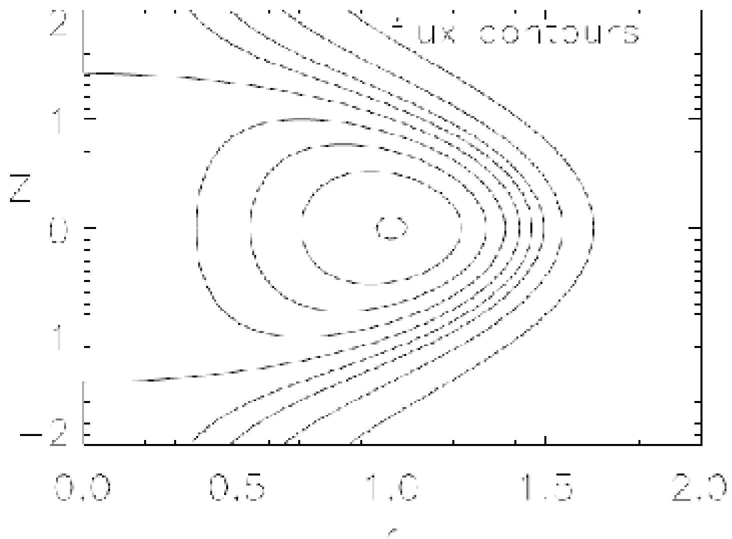
باستخدام هاتين الفرضيتين البسيطتين فان معادلة Grad-Shafranov تختزل إلى النحو التالي:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+4\pi^2r^2\mu_0\lambda=0 \qquad (9.54)$$

والتي يكون لها حل دقيق (حل Solovev)

$$\psi(r,z)=\psi_0\frac{r^2}{r_0^4}\left(2r_0^2-r^2-4\alpha^2z^2\right) \qquad (9.55)$$

حيث إن ψ_0 وr_0 وα قيم ثابتة. والشكل 11.9 يوضح رسم كنتور لـ ψ كدالة في r/r_0 و z/z_0 للحالة $\alpha = 1$. لاحظ أن هناك ثلاث أنواع مختلفة من المنحنيات في الشكل 11.9:



الشكل 11.9 يوضح (i) المنحنى المفتوح يذهب إلى $z = \pm\infty$، (ii) المنحنيات المغلقة المتمركزة، و(iii) منحنى وحيد يعرف باسم separatrix يفصل النوعين السابقين من المنحنيات

منحنيات الكنتور للفيض الثابت في حل Solovev لمعادلة Grad-Shafranov.

وبالرغم من ذلك فإنها حالة مثالية، حيث يشرح حل Solovev عدة مزايا مهمة للاتزان MHD الساكن ثلاثي الأبعاد. دعنا الآن نفحص بعض هذه المزايا. الثوابت في المعادلة (55.9) اختيرت بحيث ان $\psi = \psi_0$ عند $r = r_0$ و $z = 0$ (في الشكل هذه النقطة تقابل $r = 1$ و $z = 0$ لان الأطوال في الشكل تم تسويتها بالنسبة إلى r_0). يعرف الموضع $r = r_0$ و $z = 0$ باسم المحور المغناطيسي magnetic axis لأنه المحور الذي يرتبط بالكنتورات المغلقة للفيض الحلقي.

دعنا الآن نفترض بصفة مؤقتة إن ψ_0 موجبة. يتضح من اختبار المعادلة (55.9) انه إذا كانت ψ موجبة، فان الكميات $2r_0^2 - r^2 - 4\alpha^2 z^2$ موجبة والعكس صحيح. لأي قيمة سالبة لـ ψ، فان المعادلة (55.9) يمكن أن تتحقق بان نجعل r صغيرة جدا و z كبيرة جدا. وبحالة خاصة، إذا كانت r متناهية في الصغر فان z يجب أن تكون لانهائية. وعليه، فان كل الكنتورات لـ ψ تكون سالبة وتؤول إلى $z = \pm\infty$، هذه الكنتورات مفتوحة أو إنها من النوع (i) من الكنتور.

ومن جهة أخرى، إذا كانت ψ موجبة فانه يكون لها قيمة عظمى ψ_0 تحدث عند المحور المغناطيسي وإذا كانت $0 < \psi < \psi_0$ فان ψ يجب أن تكون موجودة عند نقطة ما خارج المحور المغناطيسي، ولكن داخل المنحنى فان $2r_0^2 - r^2 - 4\alpha^2 z^2 = 0$. وعليه فان كل خطوط الكنتور لـ ψ الموجبة يجب ان تقع داخل المنحنى $2r_0^2 - r^2 - 4\alpha^2 z^2 = 0$ وهذا يشابه خطوط المجال التي لا تذهب إلى المالانهاية. هذه الكنتورات تكون مغلقة أو من النوع (ii) من الكنتور، لأنها تشكل منحنيات مغلقة في المستوى r و z.

الكنتور الذي يفصل الكنتورات المغلقة عن الكنتورات التي تؤول إلى المالانهاية هي separatrix وتعطى بمعادلة القطع الناقص (ellipse) على النحو التالي:

$$r^2 + 4\alpha^2 z^2 = 2r_0^2. \qquad (9.56)$$

على المحور المغناطيسي ψ تكون عظمى إذا كانت ψ_0 موجبة أو أن تكون قيمة دنيا إذا كانت ψ_0 سالبة (الإشارة تعتمد على اتجاه التيار الحلقي). ولهذا، يمكننا أن نتخيل هضبة (أو وادي) للفيض poloidal موجود بقمة (أو قاع) عند المحور المغناطيسي وفي جوار القمة (أو القاع) تكون الكنتورات لـ ψ الثابتة

عبارة عن دوائر أو قطع ناقص تحيط بالمحور المغناطيسي. تحدد القيمة α شكل سطح القطع الناقص. أسطح الفيض المغلقة هذه تكون في شكل مجموعات من الأسطح الحلقية تتشارك في نفس المحور المغناطيسي. مسقط المجال المغناطيسي الكلي يقع على سطح الفيض لان المعادلة (34.9) تثبت أن

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\psi = 0.$$

أي إن المجال المغناطيسي لا يمتلك مركبة في الاتجاه العمودي على سطح الفيض.

بالتعويض المباشر من المعادلة (55.9) في المعادلة (54.9) نحصل على:

$$\lambda = \frac{2\psi_0}{\pi^2 r_0^4 \mu_0}\left(1+\alpha^2\right) \qquad (9.57)$$

وبالتالي فان الضغط يعطى بالمعادلة التالية:

$$P(\psi) = P_0 + \frac{2\psi_0}{\pi^2 r_0^4 \mu_0}\left(1+\alpha^2\right)\psi. \qquad (9.58)$$

يتلاشى الضغط عند حواف البلازما فإذا كانت ψ_{edge} فيض الـ poloidal عند الأطراف فان الثابت P_0 يحدد والمعادلة (58.9) تصبح على النحو التالي:

$$P(\psi) = \frac{2\psi_0}{\pi^2 r_0^4 \mu_0}\left(1+\alpha^2\right)\left[\psi - \psi_{edge}\right]. \qquad (9.59)$$

في النقاشات السابقة لحركة جسيم مفرد وجدنا إن الجسيمات تلتصق بسطح الفيض. الجسيمات التي تبدأ عند سطح فيض خاص تبقى في الأغلب على هذا السطح، بالرغم من إنها من الممكن أن تنتقل إلى أي جزء على سطح الفيض. الاتزان المفترض بالمعادلة (55.9) هو بالأساس فورتكس (vortex) ثلاثي الأبعاد والضغط في قيمته العظمى عند المحور المغناطيسي ومن ثم يقل تدرجيا إلى الصفر عند الطرف.

هذا بالأخص هو حل بسيط لمعادلة Grad-Shafranov، وبالرغم من ذلك فهي تعرض الكثير من المزايا المهمة:

(1) يمكن للاتزان ثلاثي الأبعاد أن يندمج في اقرب سطح فيض poloidal والذي يتمركز حول المحور المغناطيسي ويتوافق مع القيمة العظمى أو الصغرى المحلية للفيض ψ.

(2) من الممكن أيضا أن يكون سطح الفيض مفتوحا، أي إن أسطح الفيض تؤول إلى المالانهاية.

(3) أسطح الفيض التي تفصل بين أسطح الفيض المغلقة والمفتوحة تعرف باسم separatrix.

(4) المجال المغناطيسي الكلي يسقط في أسطح الفيض لان $B.\nabla\psi = 0$.

(5) الضغط المحدود يتوافق مع الانخفاض أو الارتفاع لفيض poloidal. أعلى قيمة للضغط وأعلى قيمة للفيض عند المحور المغناطيسي.

(6) المجال المغناطيسي poloidal والفيض المرتبط به ψ مسئول عن حصر البلازما وهذا ناتج عن التيار الحلقي. وبالتالي فان التيار الحلقي مهم جدا لحصر البلازما في الشكل المتماثل حول المحور. ولأي قيمة معطاة $P(\psi)$ فان المجال المغناطيسي الحلقي لا يساهم في عملية حصر البلازما إذا كان $I' = 0$. وإذا كانت قيمة I' محدودة، فان البلازما الديامغناطيسية والبارامغناطيسية سوف تؤثر على $P(\psi)$. وبالرغم من إن المجال الحلقي لا يساهم بطريقة مباشرة في حصر البلازما، إلا انه يؤثر على معدل تقاطع المجال ومعدل انتشار الطاقة وبالتالي على وظيفة الدالة $P(\psi)$. على سبيل المثال، سيكون تردد أمواج الانجراف دالة في المجال الحلقي وأمواج الانجراف يمكن أن تسبب انتشار في اتجاه خارجي للبلازما عبر أسطح الفيض، وبالتالي تؤثر على الدالة $P(\psi)$.

(7) أسطح الفيض poloidal ترتبط بالأسطح ذات كمية الحركة الزاوية الثابتة لان

$$\mathbf{B}_{pol} = \nabla \times (\psi \nabla \phi / 2\pi) = \nabla \times \left(\psi \hat{\phi} / 2\pi r \right) = \nabla \times A_\phi \hat{\phi}$$

وهذا يعني إن $A = \psi/2\pi r$. وعليه فان كمية الحركة الزاوية يمكن أن نعبر عنها بالمعادلة التالية:

$$\begin{aligned} p_\phi &= mr^2\dot{\phi} + qrA_\phi \\ &= mrv_\phi + \frac{q\psi}{2\pi} \,. \end{aligned} \tag{9.60}$$

الأسطح ذات كمية الحركة الزاوية الثابتة تتوافق مع أسطح الفيض poloidal الثابتة في عندما $m \to 0$. ولان النظام سيكون حلقي متماثل (تماثل محوري) فان كمية الحركة الزاوية لكل

جسيم ستكون ثابت من ثوابت الحركة وعليه، فإننا يمكن أن نعتبر الجسيمات بالتقريب لا تمتلك كتلة أي إن كتلتها تساوي صفر، ومسار الجسيمات مقيد ليكون واقعا على أسطح الثابت ψ. ولان p كمية محفوظة، فان أقصى تباعد لكتلة الجسم المحدودة يمكن أن تحصل عليها من سطح الفيض poloidal على النحو التالي:

$$\delta p_{\phi} = \delta \left(mrv_{\phi} + qrA_{\phi} \right) = 0. \qquad (9.61)$$

وبالتالي

$$\frac{v_{\phi}}{r}\delta r + \delta v_{\phi} + \frac{q}{m}\delta r \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_{\phi}\right) = 0 \qquad (9.62)$$

أو

$$\delta r = -\frac{r\delta v_{\phi}}{v_{\phi} + r\omega_{c,pol}} \qquad (9.63)$$

حيث $\omega_{c,pol} = qB_{pol}/m$ هو تردد السيكلترون المقاس باستخدام المجال المغناطيسي poloidal. ولان v هي من قيمة السرعة الحرارية أو اقل، إذا كان المجال poloidal قوي بما فيه الكفاية ليكون نصف قطر لارمور الـ poloidal $r_{lpol} \sim v/\omega_{c,pol}$ اقل بكثير من نصف القطر r، فان الحد الأول في المقام يمكن أن يهمل. ولان δv أيضا من قيمة السرعة الحرارية أو اقل، فان الجسيم لا يمكن أن ينحرف من سطح فيضه الابتدائي بأكثر من نصف قطر لارمور الـ poloidal. ولان المجال poloidal ينتج بواسطة التيار الحلقي، فانه من الواضح أن من متطلبات حصر الجسيم في أسطح الفيض المتماثلة حول المركز هو وجود تيار حلقي.

أجهزة Tokamaks، وreverse field pinches ، وspheromaks ، و field reversed configurations كلها عبارة عن تشكيلات مختلفة لحصر البلازما وهي اتزان ثلاثي الأبعاد متماثل حول المحور وهي تتشابه مع حل Solovev وكل التيارات الحلقية المحيطة لتنتج مجموعة من أسطح الفيض poloidal المتقاربة التي ترتبط بالمحور المغناطيسي. و Stellarators ليست تشكيلة متماثلة

حول المحور والتي لها أسطح فيض poloidal بدون تيارات حلقية، والميزة التي نحصل عليها من هذه العملية هو الابتعاد عن التعقيدات التي تطرحها حالة عدم التماثل المحوري.

9.9 الاتزان الديناميكي: التدفق

سوف نناقش في البداية الآلية الأساسية المحركة لتدفق MHD باستخدام الافتراضات المبسطة للمجال الذاتي والغير قابل للانضغاط. هذه الحالة مناسبة لحالة القوس الكهربي البسيط، والمبدأ الأساسي لجهاز المجنيتوهيدروديناميك، والتيارات الكهربي المارة في المعادن المنصهرة. الحالة الأكثر عمومية حيث البلازما قابلة للانضغاط ويوجد مجالات مغناطيسية خارجية بالإضافة إلى المجال الذاتي الذي سوف نناقشه.

1.9.9 بلازما غير قابلة للانضغاط بمجال ذاتي فقط

الـ MHD التي تحرك التدفق تتضمن حالات حيث تكون $\nabla\times(\mathbf{J}\times\mathbf{B})$ لا تساوي صفر. وهذا يعني إن قوة $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ MHD غير محفوظة وفي هذه الحالة يكون الـ curl الخاص بها يسبب ازدواج أو مصدرا للفورتكس الهيدروديناميكي. عندما تكون قوة MHD غير محفوظة فان التكامل الخطي المغلق $\oint d\mathbf{l}\cdot\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ سيكون محددا، في حين انه بالمقابل للتكامل الخطي المغلق فان تدرج الضغط $\oint d\mathbf{l}\cdot\nabla P$ يكون دائما صفر. وذلك لان تدرج الضغط لا يمكنه أن يوازن الازدواج الناتج بواسطة القوة الغير محفوظة $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$، ومن الضروري أن يشتمل على حد إخماد الفورتيكس (حد اللزوجة) ليسمح لأي إمكانية لموازنة الازدواج. وتكون لزوجة البلازما أساسا ناتجة عن التصادمات بين الايونات وهي عادة تكون صغيرة جداً. وبإضافة اللزوجة، تكون معادلة حركة MHD على النحو التالي:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U}\right)= \mathbf{J}\times\mathbf{B}-\nabla P+\rho\upsilon\nabla^2\mathbf{U} \qquad (9.64)$$

حيث υ هي اللزوجة الكينماتيكا. وسوف نركز على توليد الفورتكس (الحركة الدورانية المغزلية في الموائع) والانتقال والاضمحلال فإننا سوف نضع هذه الافتراضات:

(1) الحركة غير قابلة للانضغاط، وعليه فان ρ = const.

وهذه افتراض ممتاز للمعادن المنصهرة، ولكنه في موضع شك في حالة البلازما. وعلى كل الأحوال، هذا الافتراض يمكن أن يكون مقبولا للبلازما إذا كانت منطقة توليد الفورتكس ذات مقياس اصغر من مناطق الانضغاط أو التخلخل أو إنها تختلف من منطقة لمنطقة. والنتائج المتعلقة بالانضغاط سوف نناقشها فيما بعد.

(2) النظام له شكل اسطواني التماثل

الإحداثيات الاسطوانية r,φ,z يمكن أن تستخدم مع إهمال φ. هذا الشكل الهندسي يطابق المجنيتوهيدوروديناميك والأقواس الكهربية.

(3) سرعة التدفق U وكثافة التيار J في الاتجاه الـ poloidal (أي في المستوى r و z). وهذا يقيد التيار الكهربي ليكون poloidal وهذا يجعل المجال المغناطيسي حلقي بالكامل. (انظر الشكل 10.9).

ومن أكثر السرعات poloidal شيوعا في حالة الكثافة الثابتة، والمائع الغير قابل للانضغاط تمثله هذه المعادلة:

$$\mathbf{U} - \frac{1}{2\pi}\nabla\psi\times\nabla\phi \qquad (9.65)$$

حيث الدالة ψ(r,z) هي فيض المائع خلال الدائرة التي نصف قطرها r عند الموقع z. لاحظ إن هذا يشابه دالة الفيض المغناطيسي الـ poloidal المستخدم في المعادلة (146.3) والمعادلة (34.9). لان U تقع بالكامل في المستوى r و z ولان النظام ذو تماثل محوري، فان الـ curl للـ U سوف يكون في الاتجاه φ. وبالتالي فانه من المفيد أن نعرف القيمة القياسية الاسطوانية (vorticity)

$\chi = r\hat{\phi} \cdot \nabla \times \mathbf{U}$، وهذا التعريف يختلف قليلا عن التعريف الاصطلاحي للفورتسيتي (vorticity) والتي هي الـ curl للسرعة لأنها تشمل على معامل إضافي هو r. هذا التغير الطفيف في التعريف مهم جدا للدلالة اللفظية، ولكن يجعل الرياضيات الجبرية أكثروضوحاً .

ولان ∇φ = ^φ/r فإننا نحصل على

$$\nabla \times \mathbf{U} - \frac{\hat{\phi}}{r} r\hat{\phi} \cdot \nabla \times \mathbf{U} - \chi\nabla\phi \qquad (9.66)$$

وهكذا فان

$$\nabla \times \left(\frac{1}{2\pi}\nabla\psi \times \nabla\phi\right) - \chi\nabla\phi. \qquad (9.67)$$

وبمعالجة المعادلة (67.9) بـ ∇φ باستخدام العلاقة ∇φ. ∇ × Q = ∇. (Q×∇φ) يعطي المعادلة التالية:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{2\pi}(\nabla\psi \times \nabla\phi) \times \nabla\phi\right) = \frac{\chi}{r^2} \qquad (9.68)$$

أو

$$r^2\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2}\nabla\psi\right) = -2\pi\chi \qquad (9.69)$$

وهذه علاقة تشبه علاقة بويزون بين vorticity ودالة stream. وتلعب الـ vorticity دورا هاما في المصدر (الكثافة والشحنة) وتلعب دالة stream دورا في دالة الجهد (الجهد الكهروستاتيكي). وعلى كل حال، المؤثر البيضاوي (elliptic) ليس بالضبط مؤثر لابلاسيان وعندما يفك يصبح على النحو التالي:

$$r^2\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\nabla\psi\right)= r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \qquad (9.70)$$

والذي يكون معامله في معادلة Grad-Shafranov.

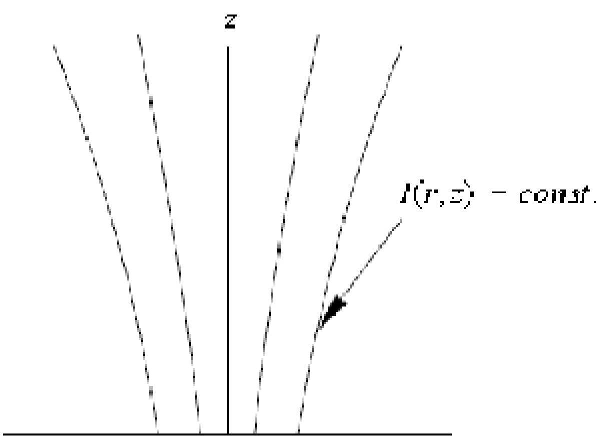
ولأننا افترضنا ان التيار يكون بالكامل poloidal، فان المجال المغناطيسي يجب أن يكون بالكامل حلقي وبالتالي يمكن أن نكتبه على النحو التالي:

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}I\nabla\phi \qquad (9.71)$$

حيث I هي التيار المار في الدائرة التي نصف قطرها r عند الموضع z. وهذا يتفق مع الشكل التكاملي لقانون أمبير، $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=\mu_0 I$. والـ curl للمعادلة (71.9) نحصل على المعادلة التالية:

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\nabla I\times\nabla\phi \qquad (9.72)$$

وهذا يثبت إن I تعمل مثل دالة stream للمجال المغناطيسي.



الشكل 12.9 قناة التيار I(r,z)

القوة المغناطيسية تكون على النحو التالي

$$\mathbf{J}\times\mathbf{B}=\frac{1}{2\pi}\left(\nabla I\times\nabla\phi\right)\times\frac{\mu_0}{2\pi}I\nabla\phi=-\frac{\mu_0}{(2\pi r)^2}\nabla\left(\frac{I^2}{2}\right). \qquad (9.73)$$

وقد لوحظ وجود قوة محورية إذا كانت I^2 تعتمد على z، وهذا شرط أساسي للحصول على تدفق محوري في أقواس الـ MHD الكهربية (Maecker 1955) ومدافع البلازما (Marshall 1960).

باستخدام المعادلات $\nabla U^2/2 = U\cdot\nabla U + U\times\nabla\times U$ و $\nabla\times\nabla\times U = -\nabla^2 U = \nabla\chi\times\nabla\varphi$ فان معادلة الحركة (64.9) تصبح على النحو التالي:

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+\nabla\frac{U^2}{2}-\mathbf{U}\times\chi\nabla\phi\right)=-\frac{\mu_0}{(2\pi r)^2}\nabla\left(\frac{I^2}{2}\right)-\nabla P-\rho\upsilon\nabla\chi\times\nabla\phi \qquad (9.74)$$

أو

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+\nabla\frac{U^2}{2}-\mathbf{U}\times\chi\nabla\phi\right) = &-\frac{\mu_0}{(2\pi)^2}\nabla\left(\frac{I^2}{2r^2}\right)+\frac{\mu_0 I^2}{(2\pi)^2}\nabla\left(\frac{1}{2r^2}\right)\\ &-\nabla P-\rho\upsilon\nabla\chi\times\nabla\phi. \qquad (9.75)\end{aligned}$$

وكل حد في هذه المعادلة إما أن يكون متدرج أو قياسي أو من الممكن أن نعبر عنه الضرب الاتجاهي الذي يشمل $\nabla\varphi$. وبالتالي فان المعادلة يمكن أن يعاد تجميعها لتصبح على النحو التالي:

$$\nabla\left(\frac{\rho U^2}{2}+\frac{\mu_0}{(2\pi)^2}\frac{I^2}{2r^2}+P\right)+\left(\frac{\rho}{2\pi}\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}-\rho\mathbf{U}\chi-\frac{\mu_0 I^2}{(2\pi r)^2}\hat{z}+\rho\upsilon\nabla\chi\right)\times\nabla\phi=0. \qquad (9.76)$$

وبالمثل، قانون اوم للـ MHD $E+U\times B = \eta J$ يمكن أن يكتب على النحو التالي:

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla V+\mathbf{U}\times\frac{\mu_0}{2\pi}I\nabla\phi=\frac{\eta}{2\pi}\nabla I\times\nabla\phi \qquad (9.77)$$

حيث V هي الجهد الكهروستاتيكي. ولان B تكون حلقية بالكامل، فان A تكون poloidal وكذلك متعامدة على ∇φ. وعليه فان كلا من معادلة الحركة وقانون اوم عبارة عن معادلات من الشكل

$$\nabla g + \mathbf{Q} \times \nabla \phi = 0. \qquad (9.78)$$

والتي هي عبارة عن الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المتماثلة محوريا والتي تشمل على الجهد. ويمكن استخلاص معادلتين تفاضليتين قياسيتين مختلفتين من المعادلة (78.9) وذلك من خلال (i) بتطبيق ×∇φ.∇ و(ii) بأخذ التباعد divergence. وبتطبيق ما سبق فانه سوف نرى إن المعادلة (78.9) تصبح على النحو التالي:

$$\nabla \phi \cdot \nabla \times (\mathbf{Q} \times \nabla \phi) = 0 \qquad (9.79)$$

أو

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \mathbf{Q}_{pol} \right) - 0. \qquad (9.80)$$

بتطبيق هذه الطريقة على المعادلة (76.9) يعطي

$$\frac{\rho}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \frac{1}{r^2} \nabla \psi \right) - \rho \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \mathbf{U} \chi \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0 I^2}{(2\pi r^2)^2} \hat{z} \right) + \rho \upsilon \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \chi \right) = 0 \quad (9.81)$$

أو

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\chi}{r^2} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{U} \frac{\chi}{r^2} \right) = - \frac{\mu_0}{4\pi^2 \rho r^4} \frac{\partial I^2}{\partial z} + \upsilon \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \chi \right) . \qquad (9.82)$$

لان ∇.U = 0، وهذا يمكن أن يكتب على النحو التالي:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\chi}{r^2} \right) + \mathbf{U} \cdot \nabla \left(\frac{\chi}{r^2} \right) = - \frac{\mu_0}{4\pi^2 \rho r^4} \frac{\partial I^2}{\partial z} + \upsilon \nabla \cdot \frac{1}{r^2} \nabla \chi \qquad (9.83)$$

والتي تبين انه إذا كان هناك لزوجة وإذا كانت $\partial I^2/\partial z = 0$، فان قياس الفورتسيتي χ/r^2 تكون محملة مع المائع، أي انه متجمدة في المائع. وحد اللزوجة على الطرف الأيمن يصف انتشار وتشتت الفورتستي. والحد المتبقي $r^{-4}\partial I_2/\partial z$ يعمل كمصدر للفورتستي ويكون محددا فقط إذا كانت I^2 غير منتظمة في الاتجاه z. مصدر الفورتستي له معامل r^{-4} ذو تأثير قوي وبالتالي فان I بالقرب من r=0 تكون هي المسيطرة. القيمة الموجبة لـ χ تتوافق مع الدوران مع عقارب الساعة في المستوى r و z. وإذا كانت I^2 هي دالة تزايدية في z فان حد المصدر يكون سالبا، وهذا يعني أن تتولد فورتكس بدوران في اتجاه عكس عقارب الساعة والعكس صحيح. افترض كما هو موضح في المعادلة 12.9 إن قناة التيار تصبح أوسع بزيادة z. في هذه الحالة تكون $\partial I^2/\partial z$ سالبة ويتولد فورتكس بحركة دورانية مع عقارب الساعة.

المائع سوف يتدفق في اتجاه القطر عند قيم صغيرة من z، ومن ثم يتدفق رأسيا للأعلى، وفي النهاية في اتجاه القطر للخارج عند قيم كبيرة من z. تدفق المائع ينتج بواسطة مصدر الفورتستي وتحمله على امتداد التدفق حتى يتشتت بواسطة اللزوجة.

بتطبيق قانون اوم على المعادلة (77.9) باستخدام $\nabla\times$.$\nabla\varphi$ نحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{I}{r^2}\right) + \mathbf{U}\cdot\nabla\left(\frac{I}{r^2}\right) = \frac{\eta}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\nabla I\right) \qquad (9.84)$$

وبهذا يتبين إن I/r^2 متشابهة مع الحمل بواسطة المائع وكذلك يكون له حد انتشار، وهذه المرة بالمعامل η/μ_0

وعليه، فان نظام المعادلات يمكن أن تلخص على النحو التالي (Bellan 1992)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi}{r^2}\right) + \mathbf{U}\cdot\nabla\left(\frac{\chi}{r^2}\right) &= \upsilon\nabla\cdot\frac{1}{r^2}\nabla\chi - \frac{\mu_0}{4\pi^2\rho r^4}\frac{\partial I^2}{\partial z} && (9.85)\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{I}{r^2}\right) + \mathbf{U}\cdot\nabla\left(\frac{I}{r^2}\right) &= \frac{\eta}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\nabla I\right) && (9.86)\\
r^2\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\nabla\psi\right) &= -2\pi\chi && (9.87)\\
\mathbf{U} &= \frac{1}{2\pi}\nabla\psi\times\nabla\phi \quad . && (9.88)
\end{aligned}$$

هذا النظام لا يمكن أن يحل بالطرق التحليلية، ولكنه يمثل سلوكا عاما يمكن وصفه بطريقة نوعية. وهذا النظام يشمل ثلاثة متغيرات قياسية هي χ وψ وI وكلها دوال في r و z. والشروط الحدية يجب أن تحدد لنتمكن من أن نحصل على مشكلة واضحة المعالم. إذا كان التدفق موجها بقوة خارجية فان فيض المائع ψ سيكون صفر عند الحدود حيث I سوف تكون محددة على الالكترودات عند الحدود. وبالأخص فان التيار I سوف يكون متدفقا من والانود في البلازما ثم إلى البلازما ومنها إلى الكاثود. والفورتيستي χ سيكون لها شروط حدية تتلاشى عند حدود السطح.

في البداية، حيث لا يكون هناك تدفق وبالتالي فان ψ تكون صفر في كل مكان. والحل المبدئي للمعادلة (86.9) في حالة عدم وجود تدفق سوف يسبب في تيار بين الالكترودين. ولأي حالة معقولة، فان شكل الدالة $I(r,z)$ سيكون له $\partial I^2/\partial z \neq 0$ وعليه فان مصدر الفورتستي سيتكون. المصدر سيكون له مكان محدد نوعا ما بسبب المعامل r^{-4}. وأول ما تصبح الفورتستي χ موجودة كما هو محدد بالمعادلة (85.9)، فان الفورتستي تعمل كحد مصدر لفيض المائع ψ في المعادلة (87.9)، وعليه فان ψ بقيمة محددة سوف تتكون. وعليه فان التدفق $U(r,z)$ سوف يتكون كما هو موضح في المعادلة (88.9)، وهذا التدفق سوف يشمل كلا من χ/r^2 و I/r^2.

وكتمثيل جيد يمكن أن نفكر في إن الحد $r^{-4}\partial I^2/\partial z$ يشكل مضخة طرد مركزي ذات تماثل حلقي والتي تعمل على تسريع المائع قطريا من قيم r كبيرة إلى قيم صغيرة. يبدأ هذا التسريع القطري من مواقع على z حيث يكون نصف قطر قناة التيار ضيقة. ويعمل الضخ بعد ذلك على تسريع المائع المحصور بداخل القناة لأعلى أو لأسفل المحور z، في اتجاه بعيدا من التيار الضيق. هذا التوليد للفورتكس يمكن أيضا ان نشاهده من خلال رسم متجهات توضح مقدار واتجاه القوة $J\times B$ في جوار التيار الضيق. وقد شوهد ان القوة $J\times B$ غير محفوظة وتنتج قوة طرد مركز كم وضحنا ذلك.

الأقواس الكهربية أو المجنيتوهيدروديناميك يمكن أن تشكل مضخة لسحب المائع قطريا للداخل في اتجاه الالكترود ذو نصف القطر الأصغر ومن ثم يقوم بقذف المائع محوريا بعيدا عن الالكترود الأصغر في اتجاه الالكترود ذو نصف القطر الأكبر. وإشارة التيار لا تهم كثيرا، لان عملية الضخ تعتمد فقط على مشتقة I^2 بالنسبة لـ z. وإذا ما وضعنا المعادلات في شكل ليس له أبعاد (بدون وحدات)، فان سرعة التدفق سوف تكون من رتبة سرعة الفين.

وحالما نتمكن من تحديد χ، و ψ، و I ، فانه من يصبح بالإمكان أن نحدد الضغط ومخطط الجهد الكهروستاتيكي. وهذا يتم من خلال اخذ التباعد (divergence) للمعادلة (78.9) لنحصل على المعادلة التالية:

$$\nabla^2 g = -\nabla\phi \cdot \nabla \times \mathbf{Q}. \qquad (9.89)$$

الضغط والجهد الكهروستاتيكي موجود ضمنا في الحد g، حيث الحد Q يشمل χ و ψ و I أو الدوال في χ و ψ و I (مثال على ذلك السرعة). وعليه، فان الطرف الأيمن في المعادلة (89.9) معروف وبالتالي يمكن اعتباره مصدرا لمعادلة بويزون للطرف الأيسر. ولمعادلة الحركة

$$g_{motion} = \frac{\rho U^2}{2} + \frac{\mu_0}{(2\pi)^2}\frac{I^2}{2r^2} + P \qquad (9.90)$$

وعليه فان

$$P = g_{motion} - \frac{\rho U^2}{2} - \frac{\mu_0}{(2\pi)^2}\frac{I^2}{2r^2}. \qquad (9.91)$$

المناطق التي يكون فيها g_{motion} ثابتة وتحقق نظرية برنولي بشكلها الموسع أي أن

$$\frac{\rho U^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} + P = const. \qquad (9.92)$$

بالمثل، بأخذ التباعد (divergence) للمعادلة (77.9) يعطى معادلة للجهد الكهروستاتيكي (باستخدام gauge كولوم بحيث أن $\nabla.A = 0$). وعليه فان الحل الكامل للتدفق الغير قابل للانضغاط يحدد في البداية بالحل لكلا من χ و ψ و I باستخدام الشروط الحدية، وبعد ذلك نجد حلا للضغط والجهد الكهروستاتيكي.

تمت الترجمة في
المركز العلمي للترجمة
www.trgma.com
2009-6-10