مقدمة

الرياضيات ممتعة. الكثير من مدرسي الرياضيات يقضون وقتهم بإقناع الناس ان الرياضيات مملة – وصعبة. لقد كنت محظوظا بان تلقيت تعليمي على أيدي مدرسين يستمتعون بالرياضيات واروني كم هي ممتعة.

من الأشياء الأكثر إثارة والتي حدثت معي هو نشر المعرفة وإزالة الغموض المحيط ببعض بنود المعرفة. لا اعني فقط فيزياء الجسيمات أو تركيب باطن الأرض – اعني أشياء مثل كيفية إصلاح أنبوبة انفجرت، وصيانة سيارة، وشراء منزل أو التعامل مع رجال الضريبة. أجيال جديدة من الناس كبروا وترعرعوا على عدم الخوف من تجريب أي شيء بأنفسهم. المدرسون والناشرون عليهم واجب بان يزودوا الناس بكتب توضح لهم كيف تعمل الأشياء. الخبراء كانوا في الماضي يعارضون ذلك – من المحتمل بسبب خشيتهم من ان خبرتهم سوف تبدوا تافهة – بمجرد ان يستخدمها أي احد. الاعتذار المعتاد ان الناس من الممكن إساءة استخدام المعلومات – ولكنه هذا من حقوقنا.

من المحتمل ان اعظم حب استطلاع عقلي متحرر للناس العاديين سوف يكون الكمبيوتر الصغير. من الممكن ان تشتري كمبيوتر جيد اليوم باقل من تكلفة بدلة جديدة. مع الكمبيوتر ستحصل على دليل استخدام للغة البيزك. هذا الكمبيوتر يمكن ان يستخدم أيضا في التسلية بالألعاب، ولكن الأكثر إثارة هو انك تستطيع استخدامه لشرح أو حتى لحل بعض المسائل في الرياضيات التي كانت تعتبر مسائل من المستحيل حلها عندما ولدت.

لم نبدأ بعد باكتشاف القدرات الحقيقية للكمبيوترات الصغيرة في الرياضيات أو في الفيزياء أو في العلوم الإنسانية. بعض المحاولات التي أجريت على استخدام الكمبيوتر في التدريس، وعلى الدراسة بأكملها (الكمبيوتر الداعم للتعليم) موجود ولكن من المحتمل انه لازال في بداياته ولم يصل لمرحلة متقدمة.

هذا الكتاب يتعامل مع مواضيع لم يتم التطرق لها من قبل في المدارس ومن الصعب ان تكون قد طرحت في المناهج الجامعية. باستخدام ابسط لغات الكمبيوتر مثل لغة البيزك، ومعرفة بسيطة في الرياضيات، يمكن شرح كل الأفكار ببرامج الكمبيوتر. وعليك ان تقوم ببعض التعديلات الطفيفة على البرنامج.

روح هذا الكتاب هي ان تجعل الرياضيات ممتعة. أنا استمتع بها وامل انك تستمتع بها أيضا. المواضيع التي تدرس في الكتاب هي طرق الفرق المحدود Finite difference methods وكيف يمكن ان تستخدم لحل مسائل حقيقية في الفيزياء والهندسة.

من بين الكثير من الناس الذين ساهموا في هذا الكتاب بتشجيعهم أو بقراءتهم وانتقاداتهم لما كتبت هم زملائي وكل الطلاب الذين اخذو المقرر في السنوات من 1980 إلى 1986. اليهم كل الشكر والتقدير

جوردن ريس

جامعة برستول

1986

2 طريقة الفرق المحدود The Finite-difference Method

1.2 طرق الفرق المحدود Finite-difference Methods

اعتبر المسألة التالية

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2.1)$$

حيث $y=a$ عندما $x=0$

يمكننا ان نكامل المعادلة (1.2) ونحصل على

$$y = \text{constant}$$

وبالتالي فان $y = a$ خو الحل.

ولكن بدلا من المعادلة (1.2) كان علينا ان نحل المعادلة

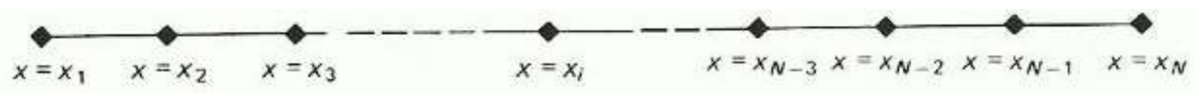
$$\frac{dy}{dx} = \exp(-x^2) \qquad (2.2)$$

حيث $y=0$ عندما $x=0$

عندها يكون لدينا مشكلة وليست صعبة فحسب ان تحل تحليليا ولكن بالرغم من إنها لا تبدو اصعب من المعادلة (1.2) إلا انه من المستحيل حلها تحليليا.

نحتاج إلى طريقة يمكن استخدمها لحل المعادلة (1.2) ويمكن أيضا ان تستخدم لحل المعادلة (2.2) وأشباهها.

الشكل 1.2 يوضح جزء من الخط الحقيقي من $x=x1$ إلى $x=x_N$ مقطعة إلى أجزاء (N-1). للتسهيل يمكننا ان نفترض ان الأجزاء متساوية الطول.



الشكل 2.2 يوضح قيم x,y عند كل من النقاط

$x_1, x_2, \ldots.., x_{i-1}, \ldots., x_N$

مع قيم dy/dx عند نقاط في منتصف المسافة بين العقد

$x =$	x_1		x_2		x_i		x_N
$y =$	a		y_2		y_i		y_N
$\frac{dy}{dx} =$		$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$			

الشكل 2.2

لحساب قيمة dx/dy استخدمنا العلاقة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{increase in } y}{\text{increase in } x}$$

وهذه علاقة صحيحة اذا كانت الزيادة في x صغيرة بما فيه الكفاية

هناك نظرية مهمة جدا (نظرية القيمة المتوسطة) والتي تنص على ان المنحنى الذي يتصرف بشكل جيد – ويمكننا ان نفترض ان منحنياتنا تتصرف بشكل جيد – سيكون له في هذه الحالة تدرج بين i-1 و i يساوي بالضبط

$$(y_i - y_{i-1})/(x_i - x_{i-1}) \qquad (2.3)$$

ويمكننا ان نشاهد من الشكل 3.2 ان هذا لا يتعدى ان يكون منطق عادي. ويمكننا ان نرى ان للمنحنيات الناعمة يكون التدرج مساويا للصيغة (3.2) عند منتصف المسافة بين العقد.

اذا استخدمنا القيم في الشكل 2.2 للمعادلة (1.2) نرى ان

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = 0$$

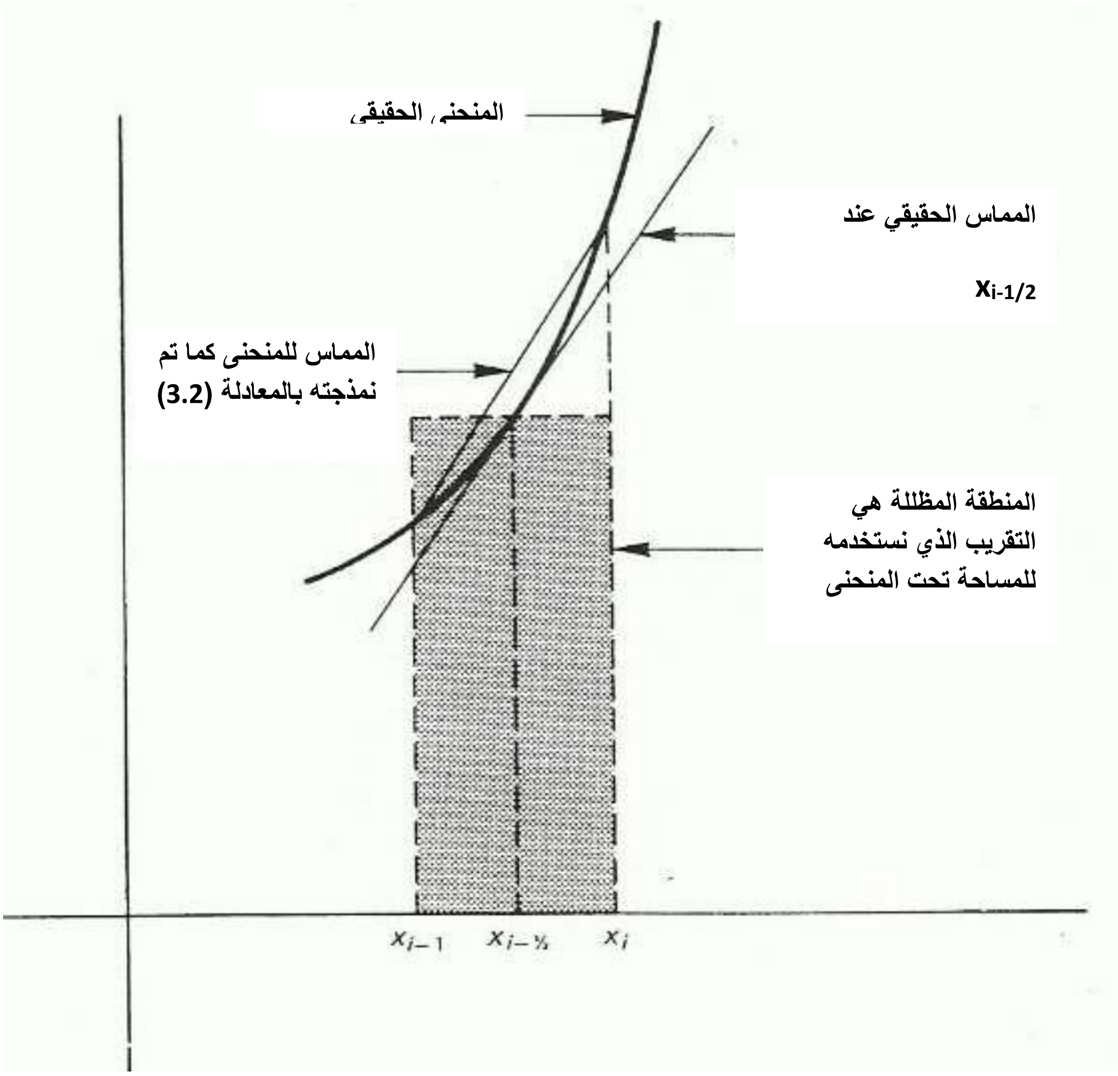
وبالتالي

$$y_i - y_{i-1} = 0$$

و

$$y_i = y_{i-1}$$

قيم y تكون بالتالي كلها نفسها، وبالتالي اذا كانت y=a عندما x=0 فان y يجب ان تساوي a في كل مكان.



الشكل 2.3

هذه المسألة سهلة جدا توضح ان، هنا على الأقل، الطريقة – طريقة الفروق المحدودة – تعمل. أي إنها تعطينا الإجابة التي نعرف أنها صحيحة.

$$y=a$$

والان دعنا نستخدم نفس الطريقة لحل مسألة (2.2). نحصل على

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \exp(-x^2_{i-½})$$

أو

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1}) \exp(-x^2_{i-½}) \qquad (2.4)$$

والتي ربما تعرف بانها نتيجة تكامل المعادلة (2.2) بالعمل على المساحة المظللة في الشكل 3.2.

وبافتراض ان x_i-x_{i-1} صغيرة بما فيه الكفاية، المعادلة (4.2) سوف تعطينا قيم دقيقة لـ y.بالبدء من عند x=0، نعلم ان y=0، ويمكننا استخدام المعادلة (3.2) لتوليد قيم متتابعة لـ y كلما تحركنا ناحية اليمن على امتداد الخط الحقيقي.

هذا، بالتالي، هو جوهر طريقة الفروقات المحدودة (finite differences). الشكل 1.2 يشرح ما سوف نسميه بالشبكة. النقاط x_i هي عقد الشبكة.

بصفة عامة الحل للمسألة في عدد m من الأبعاد سوف يتطلب شبكة ذات m بعد. مثل هذه المسألة سوف تظهر لنا اذا كان هناك عدد m من المتغيرات المستقلة. في المسائل التي نظرنا لها حتى الأن، كان هناك متغير مستقل واحد فقط (x) ومتغير تابع واحد هو (y): ولهذا السبب احتجنا فقط إلى شبكة ذات بعد واحد كما في الشكل 1.2.

البرنامج 1

(مناسب كما هو مدرج لأجهزة الكمبيوتر الشخصي IBM أو Apple II)

الأن دعنا نكتب برنامج بسيط بلغة البيسك ليقوم بحل المسائل مثل (2.2). سوف نتمسك بتركيب البرنامج الأساسي 0.

أولا، نحتاج إلى ان نكون الشبكة. لهذا نحتاج إلى مصفوفة X. دعنا نسمح، لهذه اللحظة، بـ 20 عنصر. الحلول عند كل نقطة سوف يخزن في مصفوفة Y، كذلك بـ 20 عنصر. كذلك علينا ان نقرر طول القطعة للخط الحقيقي الذي نحل المسألة على امتداده. لنسمي هذا بـ L. يمكننا حساب طول كل فترة DX، اذا استخدمنا N (اكثر من 20) عقدة، وبالتالي يكون هناك (N-1) فترة، كل فترة طولها L/(N-1). قيم الـ X(I) تحسب (السطر 100).

بعد ذلك نضع الدالة لتكون الطرف الأيمن للمعادلة. لنسميها بـ FNA(X) (السطر 200).

والان علينا ان نقرر بالنسبة للشروط الحدية (السطر 300).

وبعد ذلك نحسب قيم y باستخدام المعادلة (4.2). لاحظ انه يجب ان نحسب FNA(X) عند نقطة في منتصف المسافة بين X(I-1) و X(I) (السطر 400).

وأخيرا نرتب النتائج التي سوف نطبعها (السطر 500)، والبرنامج سوف يتوقف عند السطر 999.

```
1 REM MAIN PROGRAM SECTION: LINES 1-999
100 GOSUB 1000: REM INITIALISE
200 GOSUB 2000: REM PHYSICAL PROPERTIES
300 GOSUB 3000: REM BOUNDARY CONDITIONS
400 GOSUB 4000: REM SOLVE THE PROBLEM
500 GOSUB 5000: REM PRINT THE SOLUTION
999 STOP

1000 REM SUBROUTINE FOR INITIALISATION
   1010 DIM X(20),Y(20)
   1020 N=11: REM NUMBER OF NODES
   1030 L=2: REM LENGTH OF LINE
   1040 DX=L/(N-1): REM INTERVAL BETWEEN NODES
   1050 REM CALCULATE THE GRID
   1060 X(1)=0
   1070 FOR I=2 TO N
   1080 X(I)=X(I-1)+DX
   1090 NEXT I
1999 RETURN


2000 REM SUBROUTINE FOR THE PHYSICAL PROPERTIES
   2010 DEF FNA(X)=EXP(-X*X)
2999 RETURN
3000 REM SUBROUTINE FOR SETTING BOUNDARY CONDITIONS
   3010 Y(1)=0
3999 RETURN

4000 REM SUBROUTINE FOR CALCULATING THE SOLUTION
   4010 REM CALCULATE THE Y'S
   4020 FOR I=2 TO N
   4030 Y(I)=Y(I-1)+(X(I)-X(I-1))*FNA((X(I)+X(I-1))/2)
   4040 NEXT I
4999 RETURN

5000 REM SUBROUTINE FOR PRINTING AND PLOTTING RESULTS
   5002 PRINT: PRINT "X","Y":PRINT
   5010 FOR I=1 TO N
   5020 PRINT X(I),Y(I)
   5030 NEXT I
5999 RETURN

9000 REM SUBROUTINES FOR GRAPHICS AT 9100 ETC.
9999 RETURN
```

هذا البرنامج ليس بالأخص ان يكون كفء ولكنه بسيط جدا ويعمل. الطريقة التي استخدمناها تشبه تماما طريقة ايولير Euler's method.

اذا قمنا بتشغيل البرنامج، نحصل على النتائج التالية

X	Y
0	0
.2	.198009967
.4	.380796204
.6	.536556361
.8	.659081639
1	.748053252
1.2	.807692708
1.4	.844596613
1.6	.865676458
1.8	.876791701
2	.88220207

وكما إننا لا نعلم حل المعادلة (2.2)، فانه ليس لدينا طريقة الأن لفحص هذه النتائج للتحقق من دقتها. لفحص البرنامج، دعنا نحل معادلة نعرف حلها مسبقا.

$$dy/dx = \cos x$$

حيث $y=0$ عندما $x=0$

نعلم ان حل هذه المعادلة هو $\sin x$. بتعديل بعض الأسطر في البرنامج على النحو التالي

```
1020 N=17
1030 L=3.14159265
2010 DEF FNA(X)=COS(X)
```

ومن ثم إعادة تشغيل البرنامج، نحصل على النتائج التالية

X	Y
0	0
.196349541	.195404064
.392699081	.383298859
.589048622	.556463694
.785398162	.708243942
.981747703	.832806772
1.17809724	.925365305
1.37444678	.982362568
1.57079633	1.00160819
1.76714587	.982362569
1.96349541	.925365306
2.15984495	.832806773
2.35619449	.708243944
2.55254403	.556463697
2.74889357	.383298862
2.94524311	.195404067
3.14159265	3.09364623E-09

ويمكن ان نرى ان البرنامج (والطريقة) تعمل بشكل جيد. على سبيل المثال، قيمة (SIN(PI/4 يجب ان يكون 0.7071... في حين ان البرنامج يعطي القيمة على إنها 0.7082. و(SIN(PI/2 تعطى على إنها 1.0016 .... بدلا من 1.0000 – وهذا ليس سيء على الإطلاق.

التمرين 1.2

حل المعادلة dy/dx = sinx، باستخدام البرنامج 1، حيث y=0 عندما x=0، على المدى من x=0 إلى x=2. عدل السطر 1030 طبقا لذلك.

اذا استخدمنا 11 عقدة (السطر 1020) فانك سوف تحصل على الحل.

X	Y
0	0
.2	.0199666833
.4	.0790707247
.6	.174955832
.8	.30379937
1	.460464752
1.2	.638706224
1.4	.831417861
1.6	1.03091686
1.8	1.22924982
2	1.41850984

تحقق من دقة هذا الحل بمقارنته مع ما تحصل عليه بتكامل dy/dx=sinx وتطبيق الشرط y=0 عندما x=0.

الأن نرى كيف تتغير النتائج اذا استخدمنا 17 عقدة. يجب ان تحصل على سبيل المثال على,

1 .459997113

هذه القيم يجب ان تكون داخل 0.0003 للنتيجة التي حصلنا عليها بالتكامل – تذكر ان ،في المناقشة، 1 هي راديان وليست درجة

2.2 مسائل الرتبة الثانية Second-order Problems

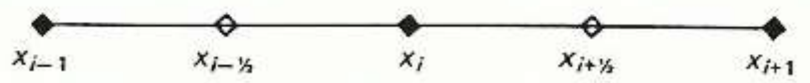
اعتبر المسألة

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \tag{2.5}$$

حيث y=0 عندما x=0

و y=0 عندما x=L

هذه المسألة من الرتبة الثانية Second-order، لأنها تحتوي على مشتقة ثانية. على كل حال الشبكة التي سنستخدمها هنا مرة أخرى هي ذات بعد واحد لأنه هناك متغير مستقل واحد فقط (x). الشكل 4.2 يوضح جزء قريب من الشبكة يحيط بالعقدة i. النقاط بين العقد معنونة بنفس الطريقة السابقة، مع النقطة i+1/2 تقع في منتصف المسافة بين العقدة i والعقدة i+1.



الشكل 4.2

سوف نستخدم الاستقراء الخطي linear interpolation ما عدا في الأماكن التي سوف نذكر إننا لم نستخدمها. هذا يعني ان الكمية التي تتغير من عقدة إلى عقدة سوف تفترض إنها تفعل ذلك بشكل منتظم. وبالتالي فان قيمة y، على سبيل المثال، عند نقطة في منتصف المسافة بين العقد i وi+1 يمكن ان تفترض بشكل سليم ان تكون في منتصف المسافة بين قيمة y عند العقدة i وقيمة y عند العقدة y+1.

الآن لكي نقوم بحل معادلات مثل المعادلة (5.2) فإننا نحتاج لإيجاد صيغة للمشتقة الثانية لـ y. نحن نعلم ان المشتقة الثانية هي معدل التغير للمشتقة الأولى، وبالتالي

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(dy/dx)_{i+½} - (dy/dx)_{i-½}}{x_{i+½} - x_{i-½}} \qquad (2.6)$$

لقد وجدنا قيم dy/dx عند النقاط التي تقع في منتصف المسافة بين العقد: انظر للصيغة (3.2). الآن، اكتب الصيغة (6.2) بشكل كامل، باستخدام (3.2)، نحصل على المعادلة (7.2)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y_{i+1} - y_i)/(x_{i+1} - x_i) - (y_i - y_{i-1})/(x_i - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})/2} \qquad (2.7)$$

هذا هو نموذج الفرق المحدود للمشتقة الثانية. وسوف تخدمنا حتى نهاية هذا الكتاب.

الاحتياط الوحيد الذي يجب مراعاته لكي نكون متأكدين من ان الصيغة التي نستخدمها قريبة بما فيه الكفاية لحقيقة هدفنا وهو جعل المسافة بين العقد i وi+1 قصيرة بما فيه الكفاية. هذا فقط مثال على الملاحظة التي سوف نعتبرها طوال الوقت.

أي منحنى يمكنك رسمه، بانعطافات حادة، يمكن ان يقسم إلى أجزاء مستقيمة اذا كانت الأقسام صغيرة جدا. الأجزاء يمكن ان تكون مستقيم كما تريد، ببساطة من خلال تقطيع المنحنى إلى أجزاء صغيرة كفاية.

هذه النظرية التي نستخدم كل يوم في حياتنا، بدون تفكير، نستخدمها على سبيل المثال، عندما نقرأ خريطة الشوارع. خريطة الشوارع تهمل انحناء الكرة الأرضية: من منظور الفضاء الخارجي يبدو سطح الأرض منحني، لكننا لا ندرك تحدب الكرة الأرضية لأننا نعيش حياتنا على أجزاء من سطح الأرض. علينا ان نصاب بالجنون اذا سمح لنا لتحدب الأرض عندما نقود السيارة أو نرمي كرة.

لهذه اللحظة، دعنا نفترض مرة أخرى يمكننا ان نستخدم شبكة منتظمة، بحيث ان كل الفترات بين العقد تساوي DX – كما في البرنامج 1.

وبالتالي يكون لدينا

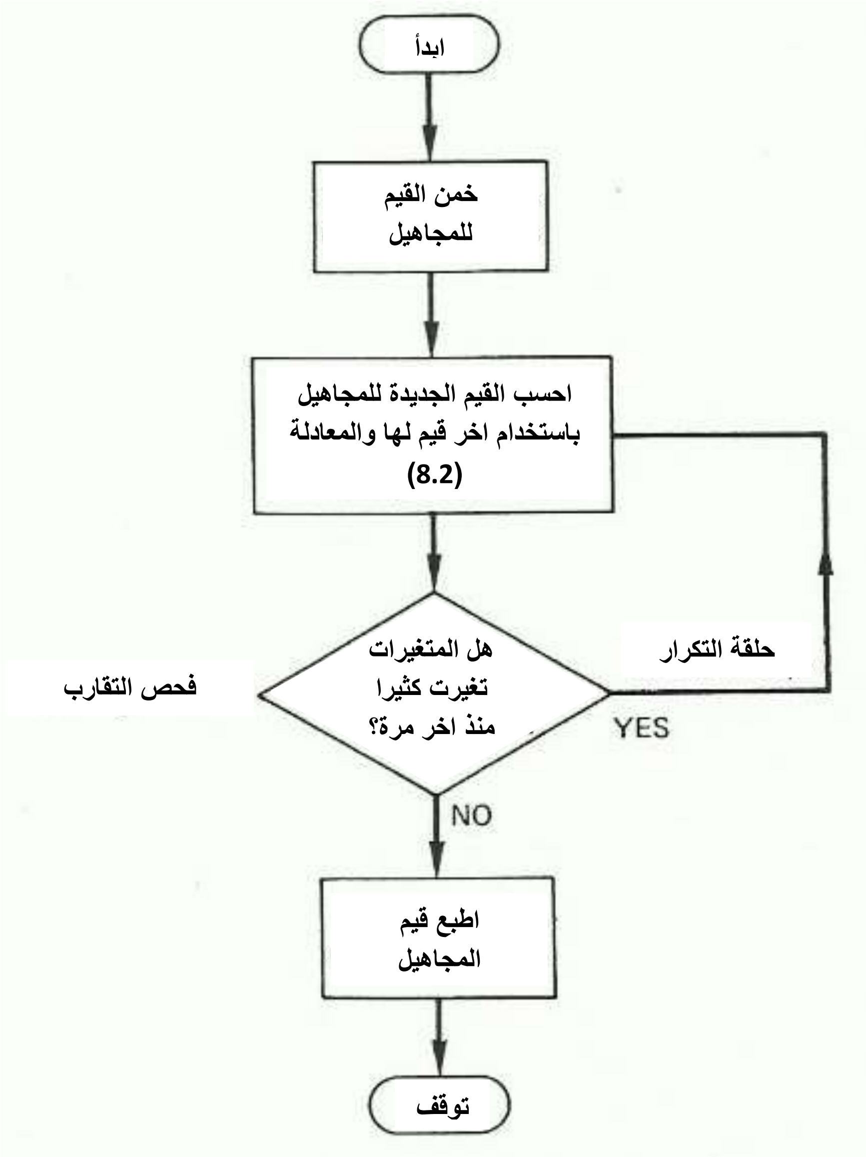
$$Y(I+1) - 2 * Y(I) + Y(I-1) = FNA(X(I)) * DX * DX$$

أو كما في صيغة برنامج البيسيك وحيث إننا مهتمون بـ ((Y(I)) بدلالة الكميات الأخرى

$$Y(I) = .5 * (Y(I+1) + Y(I-1) - FNA(X(I)) * DX * DX) \qquad (2.8)$$

الصعوبة الأساسية في استخدام المعادلة (8.2) لـ ((Y(I)) هي انه بالرغم، مثل الصيغة (4.2) التي استخدمناها لحل المعادلة (2.2)، تشير إلى الكمية، (Y(I-1، والتي نعرفها مسبقا عندما نتحرك من العقدة I-1 إلى العقدة I على امتداد الشبكة، كما إنها تحتوي على مرجع لـ (Y(I+1 والذي لا نعرفه حتى هذه المرحلة.

طريقة للتغلب على هذا هو استخدام التقنية والتي سوف نستخدمها دائما حتى نهاية الكتاب: هي التكرار Iteration. والتكرار يحتوي ببساطة على التخمين، باستخدام صيغة (مثل (8.2)) لتحسين التخمين، باستخدام تخمين افضل في الصيغة،... حتى (اذا كان هذا ناجحا) نصل لحالة لا تعد التخمينات تقدم أي تحسين – عندها يكون لدينا حل. العملية مشروحة بوضوح في المخطط (الشكل 5.2).



الشكل 5.2

الفحص لـ Y(I) سواء تغيرت كثيرا منذ اخر مرة، سوف ينجز بإضافة الفروقات (القيم المطلقة) بين الـ Y(I)'s الجديدة والقديمة. اذا كان المتبقي يتناقص اقل من 1E-6 (أي 0.000001) مثلا فإننا سنقول العملية قد وصلت للنتيجة.

نقطة أخرى يجب ملاحظتها وهي ان الطرف الأيمن للمعادلة (3.2) يجب ان يحسب في منتصف المسافة بين العقد، فان الكمية المقابلة في المعادلة (8.2) يمكن ان تحسب عند العقدة. هذا بسبب ان المشتقة الأولى والثانية محسوبة الان عند العقدة. سابقا، المشتقة الأولى يجب ان تحسب عن نقطة في منتصف المسافة، والطرف الأيمن للمعادلة يجب ان يحسب أيضا.

برنامج 2

(مناسب كما هو مدرج لأجهزة IBM PC أو أجهزة Apple II)

يمكننا الآن ان نكتب برنامج اخر لحل المعادلة (8.2)، باستخدام نفس المتغيرات تقريبا الواردة في البرنامج 1، مع إضافة المتغيرات التالية

D3 المتبقي – مقياس التغير

C3 عدد مرات التكرارات

O مخزن مؤقت للقيم القديمة لـ Y(I)

```
1 REM MAIN PROGRAM SECTION: LINES 1-999
100 GOSUB 1000: REM INITIALISE
200 GOSUB 2000: REM SET UP PROBLEM
300 GOSUB 3000: REM BOUNDARY CONDITIONS
400 GOSUB 4000: REM SOLVE THE PROBLEM
500 GOSUB 5000: REM PRINT THE SOLUTION
999 STOP
1000 REM SUBROUTINE FOR INITIALISATION
1010 DIM X(20),Y(20)
1020 N=11: REM NUMBER OF NODES
1030 L=2: REM LENGTH OF LINE
1040 DX=L/(N-1): REM INTERVAL BETWEEN NODES
1050 REM CALCULATE THE GRID
1060 X(1)=0
1070 FOR I=2 TO N
1080 X(I)=X(I-1)+DX
1090 NEXT I
   1100 C3=0: REM INITIALISE THE COUNTER C3
1999 RETURN
```

```
2000 REM SUBROUTINE FOR THE PHYSICAL PROPERTIES
   2010 DEF FNA(X)=2
2999 RETURN

3000 REM SUBROUTINE FOR SETTING BOUNDARY CONDITIONS
3010 Y(1)=0
   3020 Y(N)=0 : REM RIGHT BOUNDARY
3999 RETURN
```

```
4000 REM SUBROUTINE FOR CALCULATING THE SOLUTION
4010 REM CALCULATE THE Y'S
   4015 D3=0: REM SET RESIDUAL TO ZERO
   4020 FOR I=2 TO N-1 : REM ONLY TO N-1 NOW!!
   4025 O=Y(I): REM STORE PREVIOUS Y IN O
   4030 Y(I) = .5 * (Y(I + 1) + Y(I - 1) -  FNA(X(I))*DX*DX)
   4035 D3=D3+ABS(O-Y(I)): REM ACCUMULATE THE CHANGES
```

```
4040 NEXT I
   4100 C3=C3+1:  REM  INCREASE COUNTER
   4110  REM  PRINT OUT TYPICAL VALUE AND THE "RESIDUAL"
   4120  PRINT "RESIDUAL IS ";D3;" AFTER ";C3;" ITERATIONS"
   4130  PRINT "Y("; INT (N / 2);") = ";Y( INT (N / 2))
   4200  REM  IF NOT CONVERGED GO BACK TO 4015
   4210  IF D3 > 1E - 6 THEN GOTO 4015
4999 RETURN
```

```
5000 REM SUBROUTINE FOR PRINTING AND PLOTTING RESULTS
5002 PRINT: PRINT "X","Y":PRINT
5010 FOR I=1 TO N
5020 PRINT X(I),Y(I)
5030 NEXT I
5999 RETURN

9000 REM SUBROUTINES FOR GRAPHICS AT 9100 ETC.
9999 RETURN
```

الأسطر في البرنامج 2 التي لم تظهر بنفس الشكل (أو مختلفة تماما) عن البرنامج 1 كتبت كذلك حتى يسهل تميز التغيير.

اذا قمنا بتشغيل البرنامج، فإنها سوف تأخذ 135 تكرار لتحقق معيار التقارب D3 ≤1E-6.

على أجهزة Apple II سوف تحصل على نتيجة مثل هذه. (لان أجهزة Apple تعمل حتى 9 أرقام معيارية وأجهزة IBM تعمل حتى 6 أرقام، يجب ان نعرض نتائج Apple: لا تقلق بشأن IBM التي تعطي إجابات خاطئة اذا نظرنا لرقم مثل IE-7 – فهذا لا يشكل فرق من حيث المبدأ).

```
RESIDUAL IS .64015625 AFTER 1 ITERATIONS
Y(5) = -.075
RESIDUAL IS .560625 AFTER 2 ITERATIONS
Y(5) = -.145
RESIDUAL IS .501513672 AFTER 3 ITERATIONS
Y(5) = -.210625
RESIDUAL IS .45288086 AFTER 4 ITERATIONS
Y(5) = -.2725
RESIDUAL IS .410998536 AFTER 5 ITERATIONS
Y(5) = -.331152344
```

ويستمر ذلك حتى يتناقص المتبقي D3 إلى قيمة اقل من 1E-6.....

```
RESIDUAL IS 1.13807619E-06 AFTER 133 ITERATIONS
Y(5) = -.959998304
RESIDUAL IS 1.02934428E-06 AFTER 134 ITERATIONS
Y(5) = -.959998467
RESIDUAL IS 9.31206159E-07 AFTER 135 ITERATIONS
Y(5) = -.959998613
```

X	Y
0	0
.2	-.359999476
.4	-.639999052
.6	-.83999876
.8	-.959998613
1	-.999998613
1.2	-.959998746
1.4	-.839998985
1.6	-.639999299
1.8	-.35999965
2	0

كما سوف نرى في الجزء 4 من هذا الكتاب، هناك طريقة افضل تتجنب التكرار لمسائل من هذا النوع. في هذه اللحظة، سوف نكون مطمئنين ان البرنامج 2 يتقارب إلى النتيجة الصحيحة.

تمرين 2.2

حل المعادلة (4.2)، مع f(x)=2، من خلال إجراء التكامل لها. سوف تجد ان النتائج التي تعطى بالبرنامج 2 صحيحة حتى 6 خانات عشرية.

3.2 مسألة الرتبة الثانية العامة The General Second-order Problem

اذا دمجنا المعادلتين (2.2) و(4.2)، وجمعنا الحد في y وادخلنا المعاملات a، وb، وc، نحصل على معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x) \qquad (2.9)$$

لدينا الصيغة (5.2) لـ d^2y/dx^2. اذا افترضنا، لتبسيط ولهذه اللحظة، ان لدينا شبكة منتظمة – وهذا يعني ان DX ثابتة، نحصل على الشكل المبسط

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{dx^2}$$

كذلك نحن بحاجة إلى الصيغة لـ dy/dx. يجب ان نكون منتبهين لحساب dy/dx عند نفس النقطة – أي عند العقدة – مثل المشتقة الثانية. وكما استخدمنا بالفعل القيم Y(I+1) و Y(I-1) لحساب المشتقة الثانية، يمكننا أيضا ان نستخدمهم للحصول على المشتقة الأولى. الطريقة الواضحة لعمل هذا هو كتابة dy/dx على النحو التالي

$$\frac{Y(I+1) - Y(I-1)}{2\,DX}$$

المعادلة (9.2) تصبح

```
A*(Y(I+1)-2*Y(I)+Y(I-1))/DX/DX + B*(Y(I+1)-Y(I-1))/2/DX + C*Y(I)
          = FNA(X(I))
```

(لاحظ: هذه ليست جملة لغة البيسك ولكن معادلة علينا ان نحلها).

هذه الان يمكن ان توضع في شكل صيغة لـ Y(I) بدلالة

Y(I – 1)
Y(I + 1)
A, B and C
FNA (X(I))

لدينا

```
Y(I) = (G1*Y(I+1) + G2*Y(I-1) + G3)/G4
```
(2.10)

حيث

```
G1 = -A/DX/DX - B/2/DX

G2 = -A/DX/DX + B/2/DX

G3 = FNA(X(I))

G4 = C - 2*A/DX/DX
```

نقطة مهمة جدا هو ان نلاحظ ان المعادلة (10.2) هي في الحقيقة نفس المعادلة (8.2). هذا يعني ان برنامج الكمبيوتر المستخدم لحل المعادلة (10.2) سوف يكون نفسه لحل المعادلة (8.2).

لجعل البرنامج اسهل للاستخدام، قمنا بتعديله اكثر، للسماح بإدخال القيم A، وB، وC، N، Y(I)، وL، وY(N). انه الآن برنامج تفاعلي يمكن ان يستخدم لحل مسائل مهمة.

برنامج 3

```
1 REM MAIN PROGRAM SECTION: LINES 1-999
100 GOSUB 1000: REM INITIALISE
200 GOSUB 2000: REM SET UP PROBLEM
300 GOSUB 3000: REM BOUNDARY CONDITIONS
400 GOSUB 4000: REM SOLVE THE PROBLEM
500 GOSUB 5000: REM PRINT THE SOLUTION
999 STOP
```

```
1000 REM SUBROUTINE FOR INITIALISATION
1010 DIM X(20),Y(20)
   1020 INPUT "NUMBER OF NODES ";N
   1030 INPUT "LENGTH OF DOMAIN ";L
1040 DX=L/(N-1): REM INTERVAL BETWEEN NODES
1050 REM CALCULATE THE GRID
1060 X(1)=0
1070 FOR I=2 TO N
1080 X(I)=X(I-1)+DX
1090 NEXT I
1100 C3=0: REM INITIALISE THE COUNTER C3
1999 RETURN
```

```
2000 REM SUBROUTINE FOR THE PHYSICAL PROPERTIES
2010 DEF FNA(X)=2
   2020 INPUT "ENTER A ";A
   2030 INPUT "ENTER B ";B
   2040 INPUT "ENTER C ";C
   2100  REM   CALCULATE G1, G2 AND G4
```

```
   2110 G1 =  - B / 2 / DX - A / DX / DX
   2120 G2 = B / 2 / DX - A / DX / DX
   2130 G4 = C - 2 * A / DX / DX
2999 RETURN
```

```
3000 REM SUBROUTINE FOR SETTING BOUNDARY CONDITIONS
   3010 INPUT "Y(1) ";Y(1)
   3020 PRINT "VALUE OF Y AT X=";L;
   3030 INPUT Y(N)
3999 RETURN
```

```
4000 REM SUBROUTINE FOR CALCULATING THE SOLUTION
4010 REM CALCULATE THE Y'S
4015 D3=0: REM SET RESIDUAL TO ZERO
4020 FOR I=2 TO N-1 : REM ONLY TO N-1 NOW!!
   4022 G3 = FNA(X(I)) : REM G3 RECALCULATED AT EACH NODE
4025 O=Y(I): REM STORE PREVIOUS Y IN O
   4030 Y(I) = (G1 * Y(I + 1) + G2 * Y(I - 1) + G3) / G4
4035 D3=D3+ABS(O-Y(I)): REM ACCUMULATE THE CHANGES
4040 NEXT I
4100 C3=C3+1: REM INCREASE COUNTER
4110 REM PRINT OUT TYPICAL VALUE AND THE "RESIDUAL"
4120 PRINT "RESIDUAL IS ";D3;" AFTER ";C3;" ITERATIONS"
4130 PRINT "Y("; INT (N / 2);") = ";Y( INT (N / 2))
4200 REM IF NOT CONVERGED GO BACK TO 4015
4210 IF D3 > 1E - 6 THEN GOTO 4015
4999 RETURN
```

```
5000 REM SUBROUTINE FOR PRINTING AND PLOTTING RESULTS
5005 PRINT "X","Y",:PRINT
5010 FOR I=1 TO N
5020 PRINT X(I),Y(I)
5030 NEXT I
5999 RETURN

9000 REM SUBROUTINES FOR GRAPHICS AT 9100 ETC.
9999 RETURN
```

مرة أخرى قمنا بعمل تعديلات في بعض الأسطر لجعلها أوضح. القيم G1، G2 وG4 يمكن ان تحسب مرة واحدة وفقط عند 2110-2130 ولكن القيمة G3 يجب ان تحسب لكل عقدة، ولذلك يجب ان تظهر في داخل الحلقة، عند 4022. هذا بالطبع لان G3 – ليس كمثل المعاملات الأخرى – هي دالة في X(I) وسوف تتغير على امتداد الشبكة.

تمرين 3.2

بوضح N=11، وA=1، وB=0 وC=0، وL=2، وY(I)=0، وY(n)=0، سوف نكون قادرين على إعادة استنتاج النتائج التي حصلنا عليها من البرنامج 2. تحقق من هذا.

4.2 الرسومات Graphics

منذ بداية البرنامج 0 لدينا إمكانية الحصول على رسم منحنيات بإدخال الروتين الفرعي عند السطر 9000. الروتين التالي سوف يمكننا من رسم منحنيات للنتائج من أي برنامج. الروتين مكتوب للحصول على منحنيات بدقة تحليلية عالية لأجهزة IBM أو لأجهزة APPLE، ولكن لا يجب ان يكون صعب جدا ان تترجم لأي صيغة أخرى من صيغة لغة البيسك، باستخدام نفس المتغيرات. هناك فقط تغيرات صغيرة في الأسطر بعد 4999 ولكن الروتين عند السطر 5000 يجب ان يطور ليعطي حد فاصل بين النتائج العددية البسيطة التي حصلنا عليها من قبل والروتين الجرافيكي في الأسطر 9000-9999.

برنامج 4

(مناسب كما هو مدرج لأجهزة IBM. التعديلات الطفيفة مطلوبة لجهاز Apple II موضحة في جمل REM من السطر 9000 وحتى نهاية البرنامج)

```
100  GOSUB 1000: REM  INITIALISE
200  GOSUB 2000: REM  SET UP PROBLEM
300  GOSUB 3000: REM  BOUNDARY CONDITIONS
400  GOSUB 4000: REM  SOLVE THE PROBLEM
500  GOSUB 5000: REM  PRINT THE SOLUTION
999  STOP
1000  REM  SUBROUTINE FOR INITIALISATION
1010  DIM X(20),Y(20)
1020  INPUT "NUMBER OF NODES ";N
1030  INPUT "LENGTH OF DOMAIN ";L
1040 DX = L / (N - 1): REM  INTERVAL BETWEEN NODES
1050  REM  CALCULATE THE GRID
1060 X(1) = 0
1070  FOR I = 2 TO N
1080 X(I) = X(I -~1) + DX
1090  NEXT I
1100 C3 = 0: REM  INITIALISE THE COUNTER C3
1999  RETURN
```

```
2000  REM  SUBROUTINE FOR THE PHYSICAL PROPERTIES
2010  DEF  FN A(X) = 2
2020  INPUT "ENTER A ";A
2030  INPUT "ENTER B ";B
2040  INPUT "ENTER C ";C
2100  REM    CALCULATE G1,G2 AND G4
2110 G1 =  - B / 2 / DX - A / DX / DX
2120 G2 = B / 2 / DX - A / DX / DX
2130 G4 = C - 2 * A / DX / DX
2999  RETURN
```

```
3000  REM  SUBROUTINE FOR SETTING BOUNDARY CONDITIONS
3010  INPUT "Y(1) ";Y(1)
3020  PRINT "VALUE OF Y AT X=";L;
3030  INPUT Y(N)
3999  RETURN
```

```
4000  REM  SUBROUTINE FOR CALCULATING THE SOLUTION
4010  REM  CALCULATE THE Y'S
4015 D3 = 0: REM  SET RESIDUAL TO ZERO
4020  FOR I = 2 TO N - 1: REM  ONLY TO N-1 NOW!!
4022 G3 =  FN A(X(I)): REM  G3 RECALCULATED AT EACH NODE
4025 O = Y(I): REM  STORE PREVIOUS Y IN O
4030 Y(I) = (G1 * Y(I + 1) + G2 * Y(I - 1) + G3) / G4
4035 D3 = D3 +  ABS (O - Y(I)): REM  ACCUMULATE THE CHANGES
4040  NEXT I
4100 C3 = C3 + 1: REM   INCREASE COUNTER
4110  REM   PRINT OUT TYPICAL VALUE AND THE "RESIDUAL"
4120  PRINT "RESIDUAL IS ";D3;" AFTER ";C3;" ITERATIONS"
4130  PRINT "Y("; INT (N / 2);") = ";Y( INT (N / 2))
4200  REM   IF NOT CONVERGED GO BACK TO 4015
4210  IF D3 > 1E - 6 THEN  GOTO 4015
   4300  PRINT "HIT RETURN TO CONTINUE"
   4310  INPUT Q$: REM APPLE WORKS BETTER WITH "GET Q$"
4999  RETURN
```

```
5000  REM  SUBROUTINE FOR PRINTING AND PLOTTING RESULTS
5002  PRINT: PRINT "X","Y":  PRINT
5010  FOR I = 1 TO N
5020  PRINT X(I),Y(I)
5030  NEXT I
```

```
5300  PRINT "HIT RETURN TO CONTINUE"
5310  INPUT Q$: REM APPLE WORKS BETTER WITH "GET Q$"
5320  GOSUB 9100
5400  REM  DETERMINE X1
5410 X1 = X(1)
5420  REM  DETERMINE X2
5430 X2 = X(N)
5440  REM  DETERMINE Y1 AND Y2
5450 Y1 = Y(1)
5460 Y2 = Y(1)
5470  FOR I = 2 TO N
5480  IF Y(I) < Y1 THEN Y1 = Y(I)
5490  IF Y(I) > Y2 THEN Y2 = Y(I)
5500  NEXT I
```

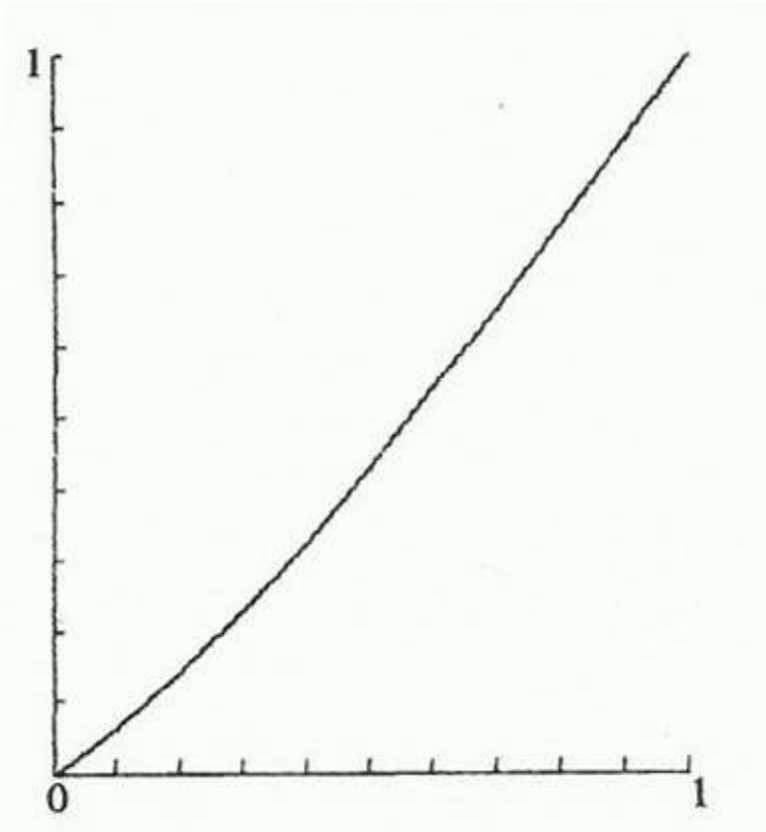
```
5510 D6 = N
5520  GOSUB 9800
5530 D0 = 0
5532 IF Y1>0 THEN D0=Y1
5534 IF Y2<0 THEN D0=Y2
5540 D1 = X1
5545 D2 = X2
5550 D7 = 10
5560  GOSUB 9200
5570 D0 = 0
5572 IF X1>0 THEN D0=X1
5574 IF X2<0 THEN D0=X2
5580 D1 = Y1
5585 D2 = Y2
5590  GOSUB 9300
5999  RETURN
```

```
9000 REM subroutines for graphics at 9100 etc
9100 CLS:REM clear screen, apple hgr2 does this anyway
9110 SCREEN 2,,0,0: REM for apple use "HGR2"
9115 REM for apple use hcolor=3 to give white on black
9116 X8=640:Y8=200:REM X8,Y8 are screen dot-densities
9118 REM for apple x8=280, y8=192
9120 DEF FNX(X)=INT((X-X1)/(X2-X1)*(X8-1)+.5)
9130 DEF FNY(Y)=Y8-1-INT((Y-Y1)/(Y2-Y1)*(Y8-1)+.5)
9135 REM x1,y1 lowest values, x2,y2 highest values plotted
9199 RETURN
9200 REM draw an x-axis at y=d0 from x=d1 to x=d2
9205 X4=FNX(D1):Y4=FNY(D0):X5=FNX(D2)
9210 LINE (X4,Y4)-(X5,Y4):REM apple HPLOT X4,Y4 TO X5,Y4
9214 REM d7 notches
9216 S8=1
9218 IF Y4<5 THEN S8=-1
9220 FOR I=0 TO D7
9222 X6=X4+I/D7*(X5-X4)
9224 LINE (X6,Y4)-(X6,Y4-4*S8):REM apple uses hplot
9240 NEXT I
```

```
9249 RETURN
9300 REM draw a y-axis at x=d0 from y=d1 to y=d2
9305 Y4=FNY(D1):X4=FNX(D0):Y5=FNY(D2)
9310 LINE (X4,Y4)-(X4,Y5):REM apple uses HPLOT
9314 REM d7 notches
9316 S8=1
9320 FOR I=0 TO D7
9322 Y6=Y4+I/D7*(Y5-Y4)
9324 LINE(X4,Y6)-(X4+4*S8,Y6):REM apple uses HPLOT
9340 NEXT I
9349 RETURN
```

```
9400 REM move the cursor
9410 X7=X:Y7=Y
9449 RETURN
9500 REM draw a line to new (x,y)
9510 LINE(FNX(X7),FNY(Y7))-(FNX(X),FNY(Y)):REM apple uses HPLOT
9520 X7=X:Y7=Y
9599 RETURN
9800 REM join-the-dots routine
9805 REM array plotter for d6 points (x(i),y(i)), i=1 to d6-1
9810 FOR I=1 TO D6-1
9820 LINE(FNX(X(I)),FNY(Y(I)))-(FNX(X(I+1)),FNY(Y(I+1)))
9830 NEXT I
9840 X7=X(D6):Y7=Y(D6)
9899 RETURN
9999 RETURN
```

اذا قمت الآن بتشغيل البرنامج 4، بوضع N=11، وA=1، وB=1، وC=1، وN=11، وL=1، وY(I)=0، وY(N)=1، يجب ان ترى على شاشتك المنحنى الموضح في الشكل 6.2.



الشكل 6.2

3. الاقتراب والتباعد Convergence and Divergence

1.3 الاقتراب Convergence

حتى الأن افترضنا ان البرامج التي استخدمت سوف تقترب من الحل. وهذا ما نقصده في هذا الكتاب من مصطلح التقارب: ليس نفس المعنى المقصود به في كتب الرياضيات (ولهذا تمت الترجمة الاقتراب وليس التقارب). عندما نرغب في التمييز بين فكرة الاقتراب في كتب الرياضيات والطريق للاقتراب التي سوف نستخدمها في برامج الكمبيوتر سوف نشير لها على التوالي على انها

(i) الاقتراب الحقيقي

(ii) الاقتراب الزائف

التعريفات الكلاسيكية للاقتراب لكل الجمل المتضمنة مثل (لكل n اكبر من N)، والتي يمكن ان تشكل جزء من الغوريثم الكمبيوتر للنوع الذي سوف نستخدمه. هذا لأننا سوف نقوم بإجراء فحوصات عددية وفقط أعداد محدودة منها. الكمبيوترات سريعة ولكن سرعتها محدودة.

فحوصاتنا للاقتراب للالغوريثيم سوف تكون ضرورية. ولن تكون كافية للتأكد من الاقتراب. على سبيل المثال يمكننا ان نصر على

(i) التغير في المتغير المستقل على دورة تكرار واحدة اقل من بعض القيم التي اخترناها مسبقا مثل القيمة 1E-6 والتي استخدمت في البرنامج 4.

(ii) عدد التكرارات المأخوذة لتحقيق (i) معقولة بدلالة الزمن اللازم لتستقر وتنتظر لتحدث.

وما لا نستطيع ان نقوم به هو

(a) فحص ان نفس الشيء سوف يحدث، ولكن القيمة الصغيرة التي اخترناها: مثل 1E-9 أو 1E-99 وهكذا.

(b) فحص انه بمجرد ان حققنا الفحص فان لا شيء يحدث ليجعله يفشل (ازدياد المتبقي مرة أخرى) اذا قمنا بالتكرار.

ليس من المحتمل ان نأتي بأمثلة ضد تلك التي تظهر بانها تحقق فحص مباشر من النوع (i) ولكن لا تتقارب. علينا ان ننظر على أمثلة في الجزء 3.3 أدناه، حتى نذكر انفسنا بانها توجد.

إنها بالطبع أساسية للتأكد بان التغيرات المذكورة في الفحص (i) هي صغيرة في الأصل.

تمرين 1.3

حاول تشغيل البرنامج 4 لـ A=1، وB=0، وC=0، وL=1، وFNF(X)=2، مع Y(I)=0 ولكن مع قيمة Y(N) مضبوطة على 1000. قبل ان تفعل هذا، أوجد أين مفتاح RESET ومفتاح BREAK على جهاز الكمبيوتر. لماذا؟

تمرين 1.3 يقترح عليك ان تبحث عن التغيرات الجزئية بدلا من التغيرات المطلقة. في السطر 4035 من البرنامج 4 قمنا بإضافة القيم المطلقة للفروقات بين القيم القديمة والجديدة للمتغيرات المستقلة عند كل عقدة. هذا يمكن ان يتحسن من خلال استبدال السطر 4035 بالسطر التالي

```
4035   D3=D3 + ABS(O-(Y(I))/ABS(O + 1E-6)
```

هذا التغير سوف يضمن ان القيم من المتبقية قد اجري لها normalize قبل ان يتم استخدامها.

في هذه الحالة، تأثير التغير في السطر 4035 هو جعل البرنامج يجري خمسة تكرارات أخرى. هذا ليس شيء خطير ولكن في بعض الحالات يجعل البرنامج يستمر لمزيد من التكرارات اكثر، وهذا يضيع الوقت، أو في حالة تكرارات اقل نفقد الدقة.

تمرين 2.3

ما هي أهمية إضافة 1E-6 إلى المقام في السطر 4035؟ (الإجابة في نهاية هذا الجزء من الكتاب).

دعنا نقدم متغير جديد

CR وهو معيار الاقتراب

والذي نضعه على النحو التالي

```
1100   CR=1E-6
```

ويستخدم في السطر 4210

```
4210   IF  D3>CR  Then GOTO  4015
```

تمرين 3.3

حدد قيمة الـ CR التي سوف تضمن ان البرنامج 4 مع

$$N = 11, A=1, B=0, C=0, FNF(X) = 2 , L = 1, Y(0) = 0, Y(I) = 1$$

وأعطي إجابات صحيحة لـ 4 خانات عشرية ومن ثم توقف.

كل هذا قد يبدو متكلف في التفاصيل، ولكن اذا لم نقم بتلك التغيرات، من المحتمل ان نجد ذلك من خلال تعديل يبدو غير ضار ظاهريا على قيم A، وB، وC وعندها نحصل على نتائج لا تمثل شيء سو مهملات. في الحقيقة هناك بعض الطرق الأفضل لـ

(i) إضاعة وقت الكمبيوتر في تكرارات غير ضرورية (من خلال جعل CR صغيرة جدا) و/أو
(ii) الحصول على نتائج غير شاملة وفيها أخطاء (من خلال جعل CR كبيرة جدا).

2.3 التباعد Divergence

بعد كل الاهتمام الذي اخدناه للتأكد ان أي نتائج نحصل عليها تتقارب فعليا، قد يبدو كما فكرنا بانه لا داعي للقلق عن خطورة التباعد. بعيدا عن هذا، واحسرتاه. اذا عرفنا التباعد على انه فشل في الوصول للاقتراب في زمن معقول، فاننا نعرف التباعد بـ

(i) تغير ثابت في قيمة y (المتغير المستقل)، مما يقترح حدوث ازيز يستمر حتى مالا نهاية.
(ii) تذبذب كبير في y أو
(iii) تذبذب في قيمة y حول قيمة ثابتة أو حول قيمة تتغير بثبات.

السبب في التباعد هو التجمع ولكن الأكثر أهمية والمستخدم بكثرة هي

(a) الالغروثيميات الرديئة (مثل تلك في البرامج 1 و2 و3 و4 – ولكن انتظر حتى الجزء التالي من الكتاب وسوف تكتشف كل ذلك)

(b) البرمجة الرديئة

(c) الصعوبات الأصلية في المسألة، على سبيل المثال

لا يوجد حل أو اذا وجد حل فان طريقتك لن تجده

(هذه لحسن الحظ نادرة في نوع البرنامج الذي سوف ندرسه)

(d) دقة كمبيوترك أو مرونة الشبكة المختارة غير كافية – قد تكون تصطاد سمك السردين باستخدام شبكة سمك بحري.

(e) حلين قريبين بحيث ان الكمبيوتر لا يستطيع ان يفصل بينهما – حالة خاصة من (d).

3.3 أسطورة تحذيرية A Cautionary Tale

افترض، انك تعرف شيء قليل عن الاقتراب، وقمنا بوضع مجموع متسلسلة غير محدودة

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

وحاول ان تجد ما هي حدود S عندما تؤول n إلى المالا نهاية. والبرنامج الذي من الممكن ان نكتبه هو على النحو التالي:

برنامج 5

(مناسب كما هو مدرج لأجهزة IBM أو أجهزة Apple II)

```
100 S = 1
200  INPUT "NUMBER OF TERMS ";N
300  FOR I = 2 TO N
400 S = S + 1 / I
500  NEXT I
600  PRINT S
700  STOP
800  END
```

(هذا برنامج لا يتكيف مع برنامج القالب 0.)

اذا قمنا بتشغيل هذا البرنامج و

بوضع

```
N=10     we get a sum of     2.92896825
N=100                        5.18737752
N=1000                       7.48547087
N=10000                      9.78760597
```

اذا صبرنا ما فيه الكفاية (ما يقارب الساعتين) حتى نضع N=1000000، فانه يجب ان نحصل على مجموع أول مليون مقلوب وهو 14.3927274.

تمرين 3.4

اذا قمنا بدلا من إخبار الكمبيوتر عدد الحدود التي سوف نقوم بإضافتها، أخبرناه بان يستمر حتى تتوقف الإجابة على التغيير، ماذا سوف يحدث؟ لا تجرب ان تفعل هذا مباشرة: فكر في الأمر.

[نقطة إرشادية مفيدة وهي/ حاول إضافة 1 و 1E-7 إلى كمبيوترك، ومن ثم اضف 1 و1E-8. الآن اضف 1 و1E-9. في معظم أجهزة الكمبيوتر التي تعمل بـ 8 bit، في البيسيك، يجب ان ترى ان 1+1E-9 هو 1. هذا لان الدقة مع هذه الأعداد المخزنة تكون كافية لإعطاء 9 خانات معيارية (ليست خانات عشرية – الأعداد تخزن بشكل علمي على أساس 1.04E-2 وليس 0.0104. حاول إضافة 1E-20 و 1E-28 وسوف تحصل على إجابة هي 1.00000001E-20.)]

كل جهاز له حدود من الدقة، وبالتالي فانه يصل لنقطة عندها لا يحدث تغير حتى مع إضافة المزيد. وبالتالي فان الكمبيوتر يجبر على استنتاج ان تلك النقطة تحقق أي فحص تقارب انت معني بان تظهره.

ولكن في الحقيقة السلسلة متباعدة فعليا! وقد بينا ان أي برنامج كمبيوتر يحسبها فانها سوف تعطي اقتراب زائف.

اذا أردت ان تقنع نفسك بان السلسلة متباعدة، قطعها إلى أجزاء صغيرة على النحو التالي

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

كل قوس يحتوي على مجموع على الاقل 0.5. هناك عدد لا نهائي منهم، وبالتالي فان مجموعهم يكون كبير بشكل لا نهائي.

ملاحظة: لا تطلب من الكمبيوتر ان يقوم بالمستحيل، لأنه أحيانا سوف يظهر انه نجح.

تمرين 3.5

فحص الاقتراب في السطر 4210 من البرنامج 4 لا يأخذ في الحسبان عدد العقد التي استخدمناها. لماذا يجب ان يكون هكذا؟

[**مساعدة ارشادية**: فكر في دقة كل حد. عندما نفحص لاقتراب الزائف فاننا نفحص كل المجال وليس كل عقدة بشكل منفصل.]

تمرين 3.6

ارسم النتائج التي حصلنا عليها لمجموع السلسلة الهارمونية من البرنامج 4 لقيم مختلفة لـ N على ورق رسم بمحاول خطية ولوغاريثمية. وبدقة اكثر، بالأخص اذا ارد تان تقوم بشراء ورق رسم بياني خاص، استخدم ورق مربعات عادي وضع كل نقطة بـ 1EN (N =1, 2, …….,6) وN وحدات تبدأ من الأصل على امتداد المحور الأفقي.

باستخدام $\ln(10) = 2.3026$، اثبت ان المتسلسلة الهرمونية تتصرف بشكل مقارب مثلما في ln(N) (حيث ان هذا المنحنى لـ ln(N) وكذلك للمجموع يظهر بانه يقترب كلما أصبحت N اكبر).

4.3 أنظمة حلول المعادلات الخطية Solving Systems of Linear Equations

في الحقيقة، برنامج 4 (مثل البرامج السابقة) هو مخطط لحل أنظمة المعادلات الخطية بالتكرار. المعادلات الفردية كلها من نفس شكل المعادلة (8.2). ونحن نحتاج لان نعرف اذا كان هناك قاعدة عامة تخبرنا اذا ما كانت معادلاتنا سوف تتقارب فعليا.

دعنا ننظر إلى ابسط نوع من المعادلات الآنية: معادلتين في مجهولين. سوف تصاب بالجنون لحل مثل هذا النظام البسيط بالتكرار وخاصة إننا نعرف طرق اسرع واسهل ومباشرة (مثل الاستبدال أو الإلغاء). ولكن اذا قمنا بحلهما بواسطة التكرار سوف نجد، لأننا نعرف ما هي النتيجة، سوف نرى ماذا يحدث عندما نستخدم التكرار ومن المحتمل ان يفشل

دعنا نأخذ المعادلتين التاليتين

$$\begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ y &= x \end{aligned} \qquad (3.1)$$

علينا ان نختار واحدة منهما لتكون المعادلة لـ x والمعادلة الأخرى لـ y: إما

$$\begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ x &= y \end{aligned} \qquad (3.2)$$

هل يهم أي مخطط نختار؟ في الحقيقة إنه مهم جدا.

يمكننا ان نكتب برنامج بسيط لحساب الحل لهاتين المعادلتين الآنيتين.

```
A1*X + B1*Y = C1

A2*X + B2*Y = C2                    (3.4)
```

باستخدام طرقتي التكرار الممكنة.

برنامج 6

(مناسب كما هو مدرج لأجهزة IBM أو أجهزة Apple II)

(مرة أخرى، ليس متوافقا مع قالبنا)

```
100   INPUT "A1:";A1
200   INPUT "B1:";B1
300   INPUT "C1:";C1
400   INPUT "A2:";A2
500   INPUT "B2:";B2
600   INPUT "C2:";C2
700   REM  BEGIN ITERATION 1
800   REM  USE EQUATION 1 FOR X, 2 FOR Y
850   PRINT "SCHEME 1": PRINT
860   PRINT "ITERATION";"   X"; TAB( 25);"Y"
900   FOR N = 1 TO 10
1000 X = (C1 - B1 * Y) / A1
1100 Y = (C2 - A2 * X) / B2
```

```
1200  PRINT N; TAB( 12);X; TAB( 25);Y
1300  NEXT N
1350  PRINT
1400  REM  BEGIN ITERATION 2
1500  REM  USE EQUATION 1 FOR Y, 2 FOR X
1520 X = 0:Y = 0: REM  RESET X,Y TO ZERO
1540  PRINT "SCHEME 2"
1550  FOR N = 1 TO 10
1600 Y = (C1 - A1 * X) / B1
1700 X = (C2 - B2 * Y) / A2
1800  PRINT N; TAB( 12);X; TAB( 25);Y
1900  NEXT N
```

عند تشغيل البرنامج 6 مع

$$A1 = 2$$
$$B1 = -1$$
$$C1 = -1$$

و

$$A2 = 1$$
$$B2 = -1$$
$$C2 = 0$$

نحصل على حل للمعادلتين (1.3) و (2.3).

مخطط 1

ITERATION	X	Y
1	-.5	-.5
2	-.75	-.75
3	-.875	-.875
4	-.9375	-.9375
5	-.96875	-.96875
6	-.984375	-.984375
7	-.9921875	-.9921875
8	-.99609375	-.99609375

مخطط 2

1	1	1
2	3	3
3	7	7
4	15	15
5	31	31
6	63	63
7	127	127
8	255	255
9	511	511
10	1023	1023

بوضوح المخطط الأول يتقارب والمخطط الثاني يتباعد.

تمرين 7.3

بالتجربة المنهجية مع القيم A1، وB1، و....، انظر اذا تمكنت من ايجاد القاعدة لتحديد أي مخطط سوف يتقارب واي مخطط سوف يتباعد. [عليك ان تجد ان الخيار C1 وC2 لا يمثلان أي فرق ولكن نسب A1 إلى B1 و A2 إلى B2 حساسة جدا.]

من الممكن ان نبين انه اذا رتبنا المعادلات في الشكل التالي

```
X = M1*Y + K1

Y = M2*X + K2
```

حيث كلا من M1 و M2 بين القيم -1 و +1، وبالتالي فان المخطط الذي سنحصل عليه سوف يكون تقارب فعلي.

النتيجة للمعادلتين بمجهولين يمكن ان تعمم لحالة n من المعادلات بعدد n من المجاهيل

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \\
x_2 &= a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\bullet \\
&\bullet \\
&\bullet \\
x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n-1,2}x_{n-1}
\end{aligned}
$$

هذا المخطط يتقارب اذا كان مجموع القيم المطلقة للمعاملات على الجانب الأيمن من المعادلات اقل من 1، ما عدا معادلة واحدة، حيث ان المعاملات من الممكن ان تجمع حتى 1. هذا ما يعرف باسم سيطرة المعيار القطري diagonal dominance criterion. الإثبات هو ان هذا الشرط كافي لضمان الاقتراب هو خارج نطاق هذا الكتاب.

تمرين 8.3

استخدم برنامج 6 لإثبات سيطرة المعيار القطري غير ضروري للاقتراب. (بمعنى أوجد زوج من القيم لكلا من M1 وM2 في المعادلة (5.3) وكلاهما ليسوا بين -1 و+1 ولكن يعطي تسلسل تقارب زائف يؤدي إلى حل عددي صحيح).

إجابة تمرين 2.3

الفكرة من خلف إضافة 1E-6 لمقام الجزء في السطر 4035 هو لضمان اذا كانت كل قيم Y تحدث بان تكون صفر (كما هو في البيسيك) السطر 4035 سوف لا يعطي 'القسم على الصفر' خطأ

6 تطبيقات طموحة: معادلة الحرارة

6 More Ambitious Applications: the Heat Equation

1.6 خلفية عن الموضوع

لقد قمنا بكتابة بعض البرامج المفيدة لحل المعادلات التفاضلية في بعد واحد (الأجزاء 1-5). في الحقيقة هذه البرامج تحتوي فقط على كل الأفكار اللازمة للتعامل مع المعادلات التفاضلية الجزئية في بعدين: كل شيء قمنا به حتى الأن سوف يكون مفيدا لحل مسائل اكثر تعقيدا. ولكن هذا سنأجله حتى الجزء القادم: في هذا الجزء سوف نحاول ان نوضح كم هو سهل ان نجعل البرامج والرموز المستخدمة في الأجزاء 1-5 مفيدة في حل المسائل الفيزيائية البسيطة في بعد واحد.

الرياضيات موضوع جميل وخصوصا عند تطبيقه على العالم الذي نعيشه. التقنيات التي قمنا بتطويرها في الأجزاء الخمسة السابقة يمكن استخدامها لتساعدنا في تصميم برنامج كمبيوتر يحل مسائل في الانتقال الحراري، والتي هي بالأساس دراسة لكيف تسخن الأشياء (الأجسام والموائع) وكيف تبرد. الفكرة العامة هي إننا ندخل الأعداد التي تخبرنا ما هو حجم وشكل الجسم او المائع، ومما هو مصنوع، وما يحيط به، وماذا اجري عليه (على سبيل المثال، تسخين الجسم من الداخل ودرجة الحرارة الابتدائية له: نحصل على الأعداد التي تخبرنا ما هي درجة حرارته في كل جزء فيه بعد مرور فترة زمنية معينة. عادة تكون الطريقة للانتقال من المعطيات إلى النتائج هي طرق رياضية معقدة: الأن، باستخدام الكمبيوترات والتقنيات في الأجزاء 1-5، يمكننا ان نكتب برنامج كمبيوتر ليقوم بالعمل لنا.

معادلة التوصيل الحراري، لجسم بموصلية حرارية k، هي (باستخدام الاختزال لمؤثرات المتجه)

$$\nabla \cdot (k\, \nabla T) = \rho\, c_v\, \partial T/\partial t - S \qquad (6.1)$$

حيث t هي الزمن، ρ هي الكثافة، c_v هي السعة الحرارية النوعية وS المصدر الحراري.

سوف نبين في الجزء التالي من الكتاب كيف يمكن اشتقاق هذه المعادلة من المبادئ الأساسية للحفاظ على الطاقة. لهذه اللحظة دعنا نأخذ المعادلة كما هي وننظر للأشياء التي تظهر فيها.

∇ تمثل مؤثر مشتقة الفراغ والتي تكون في الإحداثيات الكارتيزية (x, y,z)

$$\mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

حيث i، j، k متجهات الوحدة في الاتجاهات x، y، z على التوالي. المشتقة $\partial/\partial x$ هي المشتقة الجزئية وتعني ان y، z ثوابت والاشتقاق بالنسبة لـ x كما لو انها المتغير المستقل الوحيد. ونفس الشيء ينطبق على $\partial/\partial y$ و$\partial/\partial z$. النقطة في المعادلة (1.6) تعني الضرب النقطي (أي الضرب القياسي). ولكن لن نستخدم المتجهات اكثر من ذلك، وبالتالي لا تؤثر اذا لم نستخدم اختزال مؤثر المتجه.

الطرف الأيسر من المعادلة (1.6) كتب بالكامل للإحداثيات الكارتيزية في بعدين وهو بالتالي يكون

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\ \frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

وفي الاغلب سوف ترى الشكل المبسط وهو

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

ولكن هذا الشكل يكون حقيقيا اذا k ثابت في الفراغ – أي ان، اذا لم تتغير قيمته من نقطة للأخرى. اصل هذه الطريقة التي سوف نطورها لحل المعادلة (1.6) هو ان نسمح للقيم المتغيرة لـ k، ولذلك سوف نستخدم شكل اكثر تعقيدا من الطرف الأيسر للمعادلة.

الكميات الفيزيائية (x, y, z, k, t,.....) لا يجب ان نخشى منها. عندما كنت في المدرسة استخدمنا وحدات جنونية تضمنت وحدة القدم والباوند والسنتيمتر وأشياء مرعبة تعرف باسم وحدات الحرارة البريطانية. في الحقيقة، حتى الخمسينات من القرن العشرين كان يتوقع منا ان نعرف عن القضبان والأقطاب ووحدة perch ومكيال الـ bushels وغيرها الكثير. هذه الأيام كل هذا اختفى ونستخدم بدلا منها وحدات القياس الدولية SI وهذا يعني إننا لا نحتاج ان نفكر في الوحدات حيث الجميع يستخدم المتر للأطوال والكيلوجرام للكتلة والدرجات السليسيزية أو الكلفن لدرجة الحرارة والجول للطاقة والثواني للزمن. الجميل في وحدات SI هو انه اذا كانت المدخلات بوحدات SI فان الإجابة تكون بوحدات SI ايضا. الأكثر ذكاءً في كل نظام SI هو للقدرة الميكانيكية (1 وات تساوي 1 جول لكل ثانية) وهو مماثل

تماما لوحدة القدرة الكهربية (1 وات تساوي 1 فوت x 1 أمبير) – وبالتالي لا تشكل فرق اذا كنا نتعامل مع الطاقة الكهربية أو الطاقة الميكانيكية، ويمكننا ان نخلط بين الكميتين بدون مشاكل.

تذكر بالرغم من ان الأمتار ليست سنتيمترات وان الكيلوجرامات ليست جرامات.

الموصلية الحرارية k هي مقياس سهولة توصيل الطاقة الحرارية عبر المادة: النحاس له k=393watts/m/K وللهواء 0.0262 W/m/K، وهذا يشكل فرق حسب المادة التي نتعامل معها!

الكثافة ρ معروفة من ايام المدرسة: وكما ترى من المعادلة (1.6) كلما زادت كثافة المادة كلما تطلب طاقة حرارية اكبر لرفع درجة حرارتها بمقدار 1 درجة مئوية. الوحدات هي الكيلوجرام لكل متر مكعب – 1 متر مكعب من الماء يزن طن – ولكن سوف نستخدم وحدة SI. وبالتالي كثافة النحاس هي 8960 kg/m^3 وللماء هي 1000 (وليس 1!).

السعة الحرارية النوعية c_v هي الحرارة المطلوبة لرفع وحدة الكتلة من المادة درجة مئوية واحدة. انه من الواضح ان هذا سوف يتغير من مادة لأخرى: إنها تتطلب الكثير من الشغل لتسخين كيلوجرام من الماء (c_v=4180 J/kg/K) اكثر من تسخين نفس الكتلة من الألومنيوم (900 J/kg/K) أو النحاس (385 J/kg/K).

كل القيم المعطاة هي عند درجة حرارة الغرفة (حوالي 25oC او 298 K).

وكما لاحظت ان كلمة المصدر على الطرف الأيمن من المعادلة (1.6) يجب ان يكون كمية تقاس بنفس الوحدات كما في باقي المعادلة: باقي الطرف الأيمن بدلالة kg/m/m/m*J/kg/K*K/s – وهذا هو الوات لكل متر مكعب. إنها مقياس الطاقة الحرارية الداخلة لكل وحدة حجم (أو وحدات الطاقة الداخلة لكل ثانية لكل وحدة حجم، وهذا هو نفس الشيء في وحدات SI).

كحالات خاصة، المعادلة (1.6) تتضمن

(i) معادلة لابلاس $\nabla^2\phi = 0$

نحن نحصل عليها من خلال عدم وجود تغير في الزمن ($\partial T/\partial t$) وبدون مصدر (S=0) وإعادة تسمية T بـ ϕ.

(ii) معادلة بواسون $\nabla^2\phi = -S$

هذه المرة لدينا المصدر ولكن الباقي مثل معادلة لابلاس.

(iii) معادلة Navier-Stokes لتدفق الموائع، ولحالة خاصة مثل حركة مائع مستقر في بعد واحد

$$\nabla . (\mu \nabla U) = dp/dz$$

S أصبحت تدرج الضغط (-dp/dz)، وT هي السرعة U، وk هي اللزوجة μ. مرة اخرى نتخلص من الاعتماد على الزمن ($\partial T/\partial t=0$). وكما استخدمنا وحدات SI، سنقوم بوضع وحدة تدرج الضغط نيوتن لكل متر مربع لكل متر، واللزوجة هي نيوتن في ثانية لكل متر مربع، والنتيجة هي السرعة بوحدة المتر لكل ثانية.

هذه أمثلة قليلة لكيفية حل المعادلة (1.6) أدت بنا إلى حل عدد هائل من المعادلات نتجت في الكهربية والمغناطيسية وفي ميكانيكا الموائع وفي ديناميكا الطيران، وفي كل فرع من نظرية محتملة، بعيدا عن الانتقال الحراري المعتمد على الزمن. تطبيقات أخرى تشمل الإجهاد في المواد الصلبة، واستطالة الأغشية. وكنا ذكرنا في الجزء 1 من هذا الكتاب، فان القدرة على حل المعادلات التفاضلية الجزئية من الدرجة الثانية مثل المعادلة (1.6) يغطي جزء كبير من النظرية التي يستخدمها المهندسين والفيزيائيين والرياضيين ويتعاملون معها. والمعادلة (1.6) هي معادلة عامة مع تطبيقات واسعة النطاق.

الشكل الخاص من معادلة الحرارة التي اخترناها في المعادلة (1.6) تفترض، بدون ان تفقد الكثير من العمومية، ان k يمكن ان تتغير في الفراغ ولكن ليس في الزمن، وكلا من ρ وc_v ثوابت في كلا من الفراغ والزمن. في الحقيقة طريقة الحل التي سوف نستخدمها للمعادلة (1.6) سوف تسمح لنا، اذا رغبنا بذلك) بالاسترخاء لهذه الشروط.

في الوقت المناسب، لكي نشتق نموذج الفرق المحدود بدقة للمعادلة (1.6)، علينا ان نشتقها من المبدأ الأولي، لذلك لا داعي للقلق اذا لم يكن واضحا لك لماذا يجب ان تكون المعادلة التي تحكم شروط الحرارة. كل هذا سيصبح واضحا. وفي هذه اللحظة، دعنا نتعامل مع المعادلة (1.6) على انها معادلة ذات قيمة في حلها.

2.6 شكل مبسط من المعادلة

اذا كانت k ثابتة، يمكن كتابة المعادلة (1.6) على النحو التالي

$$\nabla^2 T = (1/a)(\partial T/\partial t) - S/k \qquad (6.2)$$

وفي حالة الاستقرار – عندما لا يكون هناك تغير في الزمن (أو لا يوجد مزيد من التغير في الزمن) – المعادلة (2.6) تصبح

$$\nabla^2 T = -S/k$$

اذا كان هناك بعد واحد في الفراغ، فان المعادلة (1.6) تؤول إلى

$$\partial^2 T/\partial x^2 = (1/a)\, \partial T/\partial t - S/k \qquad (6.3)$$

حيث، بالطبع، علينا استخدام الاشتقاق الجزئي لأنه بالرغم من ان هناك بعد واحد في الفراغ لدينا المتغير المستقل الثاني – الزمن.

اذا كان الزمن غير مهم – أي ان، اذا المسألة استقرت في حالة الاستقرار – نكتب – S/k على شكل f(x)

$$d^2 T/dx^2 = f(x) \qquad (2.5)$$

الآن $a=k/(\rho c_v)$ معروفة على إنها الانتشار الحراري. من أبعادها (مساحة لكل وحدة زمن) تتضمن مقلوب الزمن وهذا يشير بوضوح إلى معدل انتشار تغير درجة الحرارة عبر الجسم.

3.6 شكل الفرق المحدود The Finite-difference Form

المعادلة (3.6) يمكن كتابتها بسهولة في شكل الفرق المحدود finite-difference. يمثل الطرف الأيسر من المعادلة التغير في T في الفراغ مع بقاء الزمن ثابت، في حين ان الطرف الأيمن يمثل التغير في T مع الزمن عند نقطة ثابتة في الفراغ. المصدر، S/k، يمكن ان تكون أي من الجانبين لأنها افترضت ان تكون ثابتة في الفراغ والزمن.

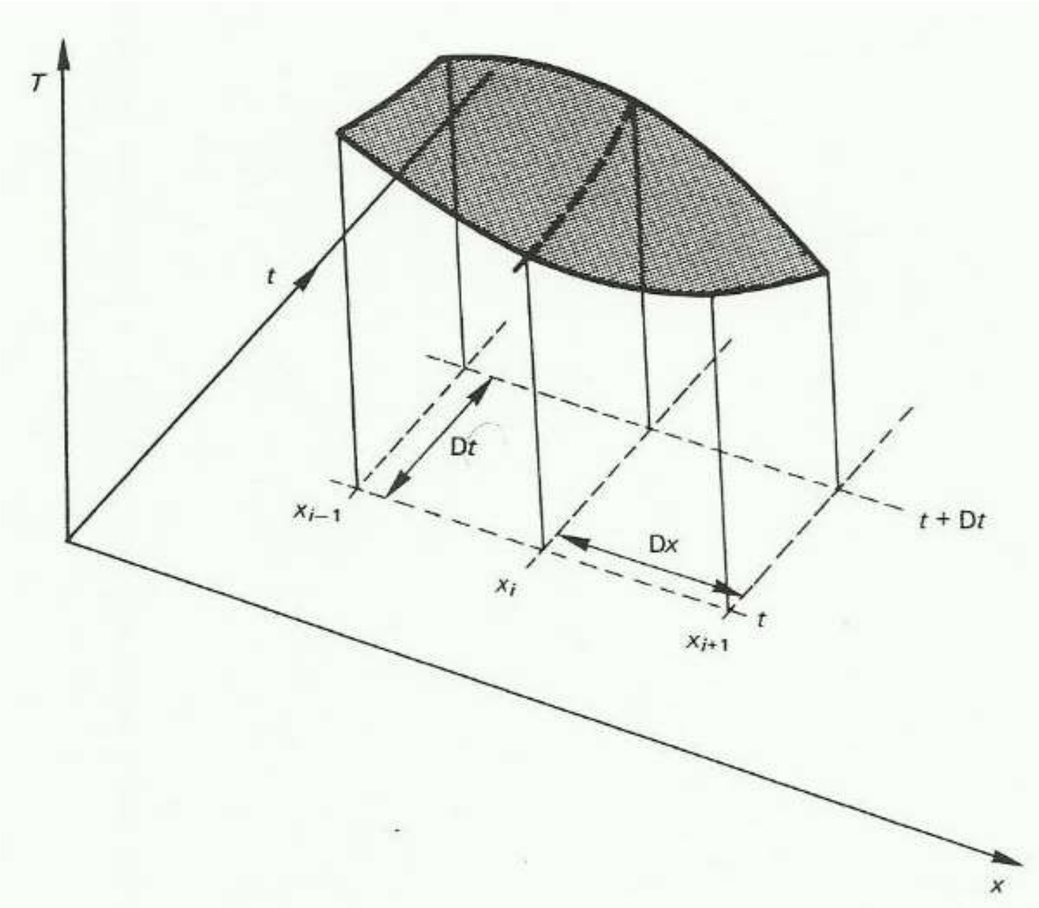
الشكل 1.6 يوضح سطح T(x.t).

يمكننا استخدام المعادلة (7.2) لوضع الطرف الأيسر في المعادلة (3.6) في شكل الفرق المحدود، مع المتغير المستقل الأن يعرف بـ T وليس y وبفترات فراغ ثابتة Dx

$$\text{left-hand side} = (T(I+1,t) - 2 * T(I,t) + T(I-1,t))/(Dx * Dx)$$

للطرف الأيمن نكتب

$$\ldots = (T(I, t + \mathrm{D}t) - T(I,t))/(\mathrm{D}t) - S/k \qquad (6.4)$$



الشكل 1.6

ولكن الأن علينا ان نقرر إما ان نقيم الطرف الأيسر عند الزمن t أو عند الزمن t+Dt – أو ربما عند بعض الزمن بين الاثنين. لأسباب سوف تظهر فيما بعد، نقول اذا قدرنا الطرف الأيسر عند زمن t، نحصل على صيغة واضحة، في حين اذا قدرنا الطرف الأيسر عند زمن t+Dt نحصل على صيغة ضمنية لـ T(I, t+Dt).

للتوضيح دعنا نكتب T(I, t+Dt) بـ $T(I)^+$ و T(I,t) بـ $T(I)^-$.

المسألة هي ببساطة إيجاد قيم T(I, t+Dt) بدلالة قيم T(I, t+Dt) و T(I,t). من خلال كتابة الطرف الأيسر للمعادلة (4.6) بدلالة T(I,t) نحصل على تعبير لـ T(I, t+Dt)، والذي لا نعرفه، بدلالة القيم المتضمنة فقط القيم T(I,t)، والتي نعرفها.

النسخة الواضحة للصيغة (4.6) هي (راجع الطرف الأيسر والطرف الأيمن لتكون الأمور اكثر وضوحا من الآن فصاعدا)

$$\frac{T_i^+ - T_i^-}{a\mathrm{D}t} = \frac{T_{i+1}^- - 2T_i^- + T_{i-1}^-}{\mathrm{D}x * \mathrm{D}x} + \frac{S}{k} \tag{6.5}$$

اذا قمنا بكتابة aDt/Dx^2 بـ R (عدد فورييه لخليتنا) نحصل على

$$T_i^+ = \frac{Sa\,\mathrm{D}t}{k} + T_i^- + R(T_{i+1}^- - 2T_i^- + T_{i-1}^-)$$

أو

$$T_i^+ = \frac{Sa\,\mathrm{D}t}{k} + RT_{i+1}^- + (1-2R)\,T_i^- + RT_{i-1}^- \tag{6.6}$$

المعادلة (6.6) هي تعبير واضح للمجهول T بدلالة الكمية المعروفة T. وهذا معناه واضح.

المعادلة (6.6) ، جيدة جدا لان تكون صحيحة لكل Dt. المعادلة (6.6) ليست كلام فارغ، R يجب ان تكون اقل او تساوي 0.5. والا المعامل لـ T(I,t) سيكون سالبا: هذا يعني انه كلما كانت درجة الحرارة اقل عند النقطة i عند الزمن t، تكون اعلى عند نفس النقطة وبعد مدة زمنية. هذا سيكون سخيفا ويوضح فقط ان يمكننا ان نستخدم درجات الحرارة القديمة للتنبؤ بالدرجات الجديدة على المدى القريب وليس البعيد. الحد هو R=0.5. هذا يعني انه لكي نحصل على حالة الاستقرار – عندما لا يكون هناك تغير ملحوظ إضافي في درجات الحرارة، والذي يحدث عند حوالي R=10 في الكثير من الحالات الفيزيائية – علينا ان نأخذ أعداد كبيرة لفترات زمنية صغيرة.

المعادلة (6.6) لها ميزة وحيدة وهي ان الحل لا يتطلب تكرار. على كل حال، كما شاهدنا بالفعل، لا يوجد سبب لماذا النظير الضمني للمعادلة (6.6)

$$T_i^+ = \frac{Sa\,Dt}{k} + T_i^- + R(T_{i+1}^+ - 2T_i^+ + T_{i-1}^+)$$

أو

$$(1 + 2R)\,T_i^+ = \frac{Sa\,Dt}{k} + T_i^- + R(T_{i+1}^+ + T_{i-1}^+) \qquad (6.7)$$

لا يجب ان يعاد ترتيبها لتستسلم لـ TDMA. في الحقيقة المعادلة (7.6) هي المعادلة (10.2) مرة أخرى

```
Y(I) = (G1*Y(I+1) + G2*Y(I-1) + G3)/G4
```
(2.10)

مع

$$\begin{aligned} G1 &= 1 \\ G2 &= 1 \\ G4 &= 2 + (1/R) \end{aligned} \qquad (6.8)$$

و

$$G3 = (1/R)\,T_i^- + \frac{S\,Dx\,.\,Dx}{k}$$

بذلك يمكننا ان نستخدم برنامج 7 او تعديلاته المؤخرة لحل معادلة الحرارة (1.6) في فراغ واحد وفي بعد واحد.

الصيغة الواضحة قد لا تعمل لقيم كبيرة من R. الصيغة الضمنية من جانب أخرى سوف تتقارب للحل لأي قيم من R مهما كانت كبيرة.

اذا نظرنا للمعادلة (7.6) يمكن ان نرى ان مجموع معاملات المجاهيل على الطرف الايمن بعد القسم على (1+2R) لنحصل على معادلة لـ T(I, t+Dt) تكون اقل من 1، لان R/(1+2R) اقل من 0.5 لكل قيم R. هذا يعني ان الصيغة الضمنية تحقق معيار السيطرة القطرية التي ذكرناها مسبقا في الجزء الثالث من الكتاب ولهذا فانها سوف تتقارب لكل قيم R.

برنامج 11

(مناسب كما هو مدرج لأجهزة IBM أو أجهزة Apple II)

التعديلات للبرنامج 7 لهذه المسألة هي على النحو التالي

```
2010  REM FNF(X) NOT NEEDED
2020  INPUT "ENTER CELL FOURIER NO :";R
2030  INPUT "ENTER CONDUCTIVITY :";K
2040  INPUT "ENTER HEAT SOURCE :";S
2110 G1 = 1
2120 G2 = 1
2130 G4 = 2 + 1 / R
```

```
4002  GOSUB 5000
4022 G3 = Y(I) / R + S * DX * DX / K
4120 REM
4130 REM
4200  REM  ALWAYS CONVERGES
4210  GOSUB 9800
4220  GOTO 4015

5002  PRINT "TEMPERATURES AT FO = ";C3 * DX * DX / L / L * R
```

لقد اجبرنا البرنامج بان ينتقل إلى الفترة الزمنية التالية بدون تكرار. في الحقيقة، اذا الأسطر 4200-4220 تركت بدون تغير في البرنامج 7 سوف تظهر بانه تجري تكرار. السطر 4022 يصل له خلال كل تكرار، لذلك قيمة G3 سوف تتحدث عندما يتم الحصول على القيمة الجديدة لـ Y(I). هذا خطأ، عندما تكون القيمة المطلوبة لـ Y(I) في السطر 4022 قيمة قديمة – فان الوحد عند الزمن t، ليس هو الواحد عند t+Dt، ولذلك فان Y(I) سوف تتكرر. لذا علينا ان نتشجع الان ونتوقف على الإسراف في التحقق الثاني عند كل خطوة زمنية. يستخدم السطر 4210 المصفوفة المرسومة عند 9800 بدلا من موديول الرسومات كله: وهذا له تأثير تراكب المنحنيات على نفس المحور دون مسح الشاشة.

الأن يمكننا ان نبدأ حل المسائل الحقيقة، تماما كما قلنا في بداية هذا الجزء.

تمرين 1.6

تمرين 1.1.6. استخدم برنامج 11 معدل بشكل مناسب لحل المسألة التي تتكون من أنبوبة مصممة من الحديد طولها 1 متر، معزولة على جانبها الدائري (ما عدا الأطراف)، درجة حرارتها الابتدائية 20 درجة مئوية- وفجأة سخنت عند طرف لـ 100 درجة مئوية في حين ان الطرف الأخر بقي ثابتا عند درجة حرارة 20 درجة مئوية.

تمرين 2.1.6. استخدم برنامج 11 بتعديل إضافي، استخدم التحديث للشروط التدرج الحدية، لحل مسألة من أنبوبة مصممة من طولها متر عندما تم تسخين طرف كما في التمرين 1.1.6 ولكن في هذه المرة تم عزل الطرف الأخر. استخدم برنامج 12.

برنامج 12

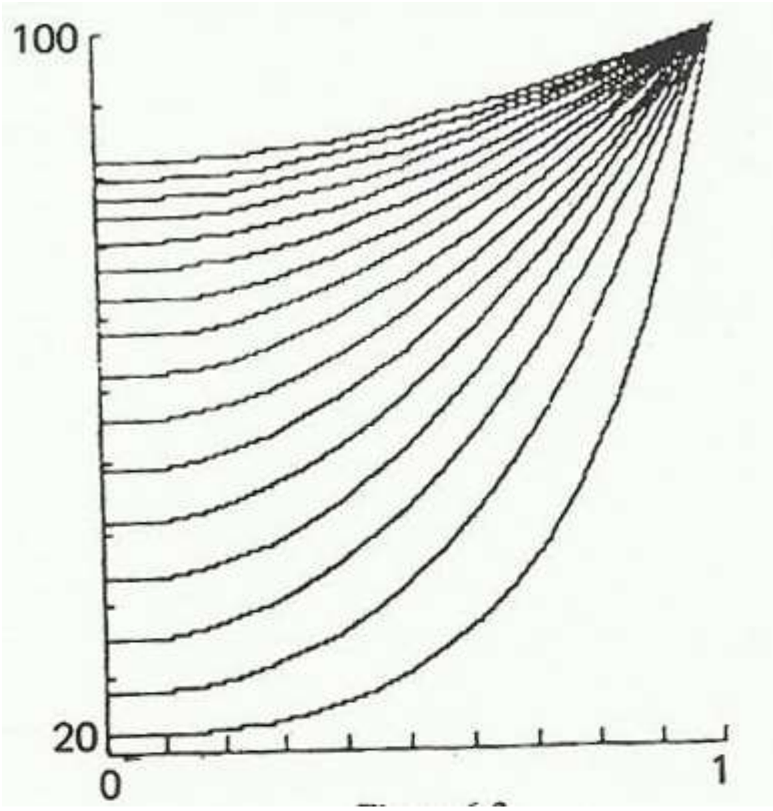
(مناسب كما هو مدرج لأجهزة IBM أو أجهزة Apple II)

كما في برنامج 11 ما عدا ما يلي

```
3010  INPUT "ENTER GRADIENT AT X(1) ";G

4002 GOSUB 5000

4048 D(2) = D(2) + A(2)
4050 B(2) = B(2) + A(2) * G * DX

4200 Y(1) = Y(2) - G * DX
```

يجب ان تحصل على نتيجة تشابه الشكل 2.6.

المنحنيات هي لخطوات من R=0.05. اذا قمت بضبط قيمة عدد خلية فورييه بشكل مناسب لـ 19 عقدة، يجب ان تحصل على النتيجة الموضحة.



الشكل 2.6

7 ظاهرة ثانية الأبعاد - لمحة عن الواقع

1.7 التوصيل الحراري في بعدين

العالم الحقيقي ليس ذو بعد واحد ولا ثلاثة ابعاد بصفة عامة. هذه اخبار جيدة، وحيث ان النماذج ذات البعد الواحد تبدو بالمقارنة مع الحقيقة سهلة جدا والنماذج ثلاثية الابعاد كبيرة جدا لاجهزة الكمبيوتر. تبين الحسابات السريعة ان مسألة نموذجية مثل المسائل التي بحثنا فيها في الجزء 4 تتطلب 99 عقدة في بعد واحد وتتطلب 99*99*99 في ثلاثة ابعاد. اذا احتاج احد لتخزين عشرة اصناف من البيانات على سبيل المثال حول كل عقدة/ فان هذا يعني 10 مليون صنف بالمجموع. من السهل ان ترى كم هو صعب التعامل مع مسائل ثلاثية الابعاد حيث تتطلب سعات كمبيوتر اكبر من المتوفرة حاليا. كما ان المسائل تتطلب وقت طويل جدا للتكرار لتصل للاقتراب.

المعادلة لا زالت هي

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = \rho\, c_v\, \partial T/\partial t - S \qquad (6.1)$$

وفي الإحداثيات الكارتيزية في بعدين تكون

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\rho\, c_v\,\frac{\partial T}{\partial t}-S \qquad (7.1)$$

وفي الإحداثيات القطبية في بعدين (r و z حيث افترض ان المسألة متماثلة حول المحور – لا يوجد تغير بالنسبة لـ θ) وهذا يصبح

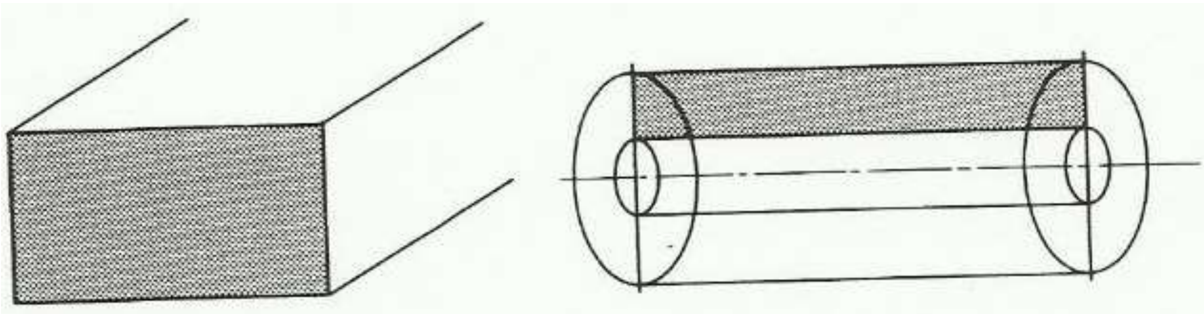
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\,\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\rho\, c_v\,\frac{\partial T}{\partial t}-S$$

اذا استخدمنا علامة مثل * فان r في المعادلة (2.7) ليست جزء من المؤثرات التفاضلية

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{1}{r^*}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^*\,\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\rho\, c_v\,\frac{\partial T}{\partial t}-S \qquad (7.2)$$

يمكن ان نرى الفرق بين المعادلتين (1.7) و(2.7) هو ان المعادلة (2.7) تحتوي على r* والمعادلة (1.7) لا. اذا وضعنا r*=1 في المعادلة (2.7) نحصل على المعادلة (1.7). وبالتالي (1.7) هي حالة خاصة من المعادلة (2.7) تم الحصول عليها بأخذ النهاية. هذا، على سبيل المثال، صحيحا على سطح كرة كبيرة جدا. ولهذا الأرض تكون مسطحة (على الأقل لكل الأهداف العملية المعتادة: علينا ألا نهتم بالفرق في الجاذبية بين رؤوسنا وأقدامنا).

يوضح الشكل 1.7 نطاقات الحلول للإحداثيات الكارتيزية والقطبية. افترضنا عدم وجود تغير في كل حالة في الاتجاه العمودي على الورقة. كما افترضنا أيضا إننا نعمل على سمك يساوي الوحدة في هذا الاتجاه. في الحالة الأسطوانة القطبية هذا يعني ان زاوية الوحدة للدوران في θ (أي 1 راديان). هذا الاصطلاح هو فقط لتبسيط الحسابات – حيث انه لا يوجد تغير في الاتجاه العمودي على الورقة فانه لا يفرق كم افترض ان يكون عمق المادة الصلبة، ولكن اذا كان العمق بمقدار وحدة فان حجوم الخلايا مساوية لمساحات المقطع في r*.

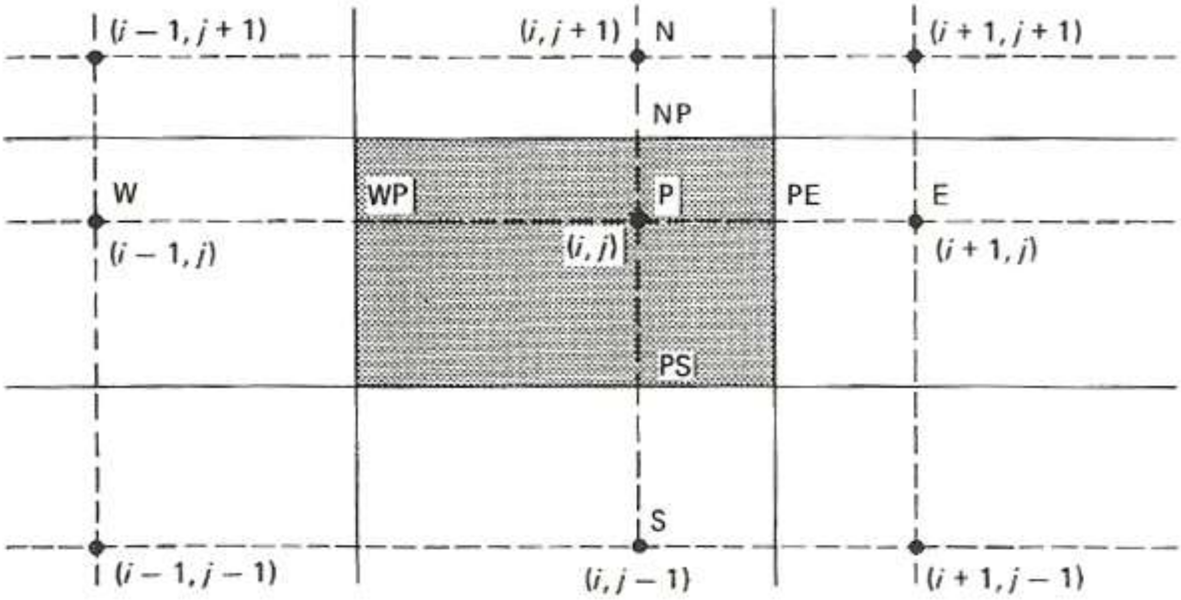


الشكل 1.7

2.7 اشتقاق معادلة الحرارة

الشكل 2.7 يوضح حجم التحكم. هذا صندوق اختياري صغير بحيث يجب ان نراعي ما يدخل فيه وما يعبر الحدود. ما الذي نحاول ان نقوم به هو مشابه تماما لحساب التغير السنوي في التعداد السكاني في بريطانيا: هذا يجب ان يساوي عدد السكان المولودين في بريطانيا خلال العام ناقص عدد السكان المتوفين مضافا لها عدد السكان القادمين من الخارج ناقص عدد السكان المهاجرين. في هذه الحالة نحاول ان نوازن الحرارة للحجم المتحكم. الحرارة محفوظة بحيث ان الحرارة الكلية المتدفقة في الحجم المتحكم عبر الأوجه مضاف لها الحرارة المتولدة داخليا يجب ان تساوي التغير في الطاقة الداخلية داخل الحجم المتحكم.

الحكم المتحكم في الشكل 2.7 هو عبارة عن خلية واحدة: عقدة محاطة بخطوط الشبكة. نحن نرى فقط العقدة، P، ولكن أيضا العقد الشرقية E لـ P، والغربية W لـ P، والشمالية N لـ P، والجنوبية S لـ P. خطوط الشبكة مرسومة لتقطع المسافات بين P وجيرانها.



الشكل 2.7

دعنا نحسب المركبات الفردية للتوازن الحراري. علينا ان نجعل الاشياء اسهل قليلا من خلال افتراض اننا نعمل على الاحداثي الكارتيزي بدلا من القطبي.

في البداية كل الحرارة المتجمعة داخل الحجم المتحكم، الذي سوف نفترضه بعمق الوحدة (في الاتجاه العمودي على الورقة): وهذا معطى بواسطة S، معدل التوليد لكل وحدة حجم لكل وحدة زمن. وبالتالي في وحدة الزمن، فان كمية الحرارة المتولدة في الحجم المتحكم هي

$$S \, \mathrm{Dx} \, \mathrm{Dy}$$

والخطوة التالية، معدل زيادة الطاقة الداخلية: وهو

$$\frac{\partial E}{\partial t} \rho \, \mathrm{Dx} \, \mathrm{Dy} = c_v \frac{\partial T}{\partial t} \rho \, \mathrm{Dx} \, \mathrm{Dy}$$

للمركبة الثالثة للتوازن الحراري، يجب ان نستخدم قانون فورييه، والذي ينص على ان كمية الحرارة المتصلة في الاتجاه x، مثلا، عبر الخلية في وحدة زمن واحدة هي

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\,\frac{\partial T}{\partial x}\,\mathrm{D}y\right)\mathrm{D}x$$

حيث Dy (مضروبة في 1، لعمق الخلية والذي يساوي الوحدة) تمثل مساحة المقطة للأوجه عند WP وPE في الشكل 2.7. بالمثل للاتجاه y، نحصل على (الانتقال من الأسفل إلى الأعلى – أي الزيادة في قيم y)

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(-k\,\frac{\partial T}{\partial y}\,\mathrm{D}x\right)\mathrm{D}y$$

اذا دمجت هذه المركبات لتكون التوازن الحراري للخلية، نحصل على

التدفق الحراري الداخل + الحرارة المتولدة بالداخل = الزيادة الكلية في الحرارة

وبهذا يكون

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\,\frac{\partial T}{\partial x}\,\mathrm{D}y\right)\mathrm{D}x-\frac{\partial}{\partial y}\left(-k\,\frac{\partial T}{\partial y}\,\mathrm{D}x\right)\mathrm{D}y+S\,\mathrm{D}x\,\mathrm{D}y=\rho\,c_{\mathrm{v}}\,\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{D}x\,\mathrm{D}y$$

وهذه نفس المعادلة (1.7)

3.7 شكل المعادلة في طريقة الفرق المحدود Finite-difference

من المعادلة (2.7)، والتي سوف نستخدمها لأنها اكثر شكل عام لمعادلة الحرارة، الشكل الدقيق لنموذج الفرق المحدود للتوصيل الحراري الإجمالي عبر الحجم المتحكم من اليسار إلى اليمين سوف يكون

$$\frac{k_{\mathrm{PE}}\,\dfrac{T_{\mathrm{E}}^{+}-T_{\mathrm{P}}^{+}}{z_{\mathrm{E}}-z_{\mathrm{P}}}-k_{\mathrm{WP}}\,\dfrac{T_{\mathrm{P}}^{+}-T_{\mathrm{W}}^{+}}{z_{\mathrm{P}}-z_{\mathrm{W}}}}{z_{\mathrm{PE}}-z_{\mathrm{WP}}}\quad \text{at time } (t+\mathrm{D}t) \qquad (7.3)$$

بالمثل، الصيغة لمعدل التدفق الحراري الإجمالي من الأسفل إلى الأعلى للحجم المتحكم سوف يكون

$$\frac{1}{r_P^*}\,\frac{k_{PN}\, r_{PN}^* \dfrac{T_N^+ - T_P^+}{r_N - r_P} - k_{SP}\, r_{SP}^* \dfrac{T_P^+ - T_S^+}{r_P - r_S}}{r_{PN} - r_{SP}} \quad \text{at time } (t + Dt) \qquad (7.4)$$

وبالتالي مجموع الصيغتين (3.7) و(4.7) سوف يساوي

$$\rho\, c_v\, \frac{T_P^+ - T_P^-}{Dt} - S$$

4.7 نموذج K_{PN} الخ.

كما يمكن ان ترى من التعبيرين (3.7) و(4.7) نحتاج إلى نموذج للقيم k عند PN، SP، WP، PE. وهذا مهم حيث k يجب ان تسمح لها بان تتغير من عقدة لعقدة. قد يبدو هذا معقولا لان نستخدم الاستقراء الخطي لـ k.

$$k_{PN} = (k_P + k_N)/2 \qquad (7.5)$$

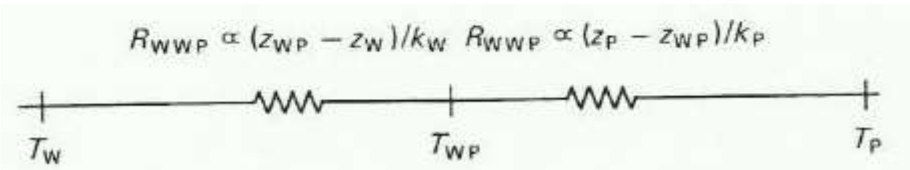
على كل حال، هناك سبب جيد لمعاملة k كاستثناء لقاعدتنا العامة في استخدام الاستقراء الخطي عندما يكون متاحا. المعادلة (5.7) تسبب تناقض.

اعتبر عدم تواصل في المادة: هذا يحدث عندما تتكون المادة الصلبة من مادتين مختلفتين. ويجب ان نرتب الشبكة بحيث يكون عدم التواصل متوافق مع حدود حجم المتحكم – على سبيل المثال، عند النقطة WP – بالتالي تكون المعادلة (5.7) تعني ان قيمة k عند WP هي متوسط الموصلتين على الجانبين من WP. الأن، اذا كان لدينا عزل تام (تقريبا) على جانب واحد (k تقريبا صفر عند W وخلال الخلية المحيطة بـ W)، المعادلة (5.7) تخبرنا ان الموصلية الفعالة من W إلى P سوف تكون k/2. هذا سوف يعني ان هناك كمية من التوصيل الحراري لا تساوي صفر خلال الجدار الاديباتيكي عند WP. هذا هراء: اذا كان هناك موصلية تساوي صفر بين W وP فانه لا يكون هناك انتقال حراري بين W و P. لذلك علينا ان نجد نموذج افضل لقيمة k عند WP.

ننتقل إلى قانون أوم لحل مسألتنا، لأنها نفس المسألة تظهر في مسائل التوصيل الكهربي. نحن نعرف انه يمكن جمع المقاومات على التوالي (الشكل 3.7).

الشكل 3.7

الشبه مع الحرارة – حيث تستخدم المقاومات الحرارية بدلا من الكهربية، ولكن نفس المبدأ لا يتغير – موضح في الشكل 4.7.



الشكل 4.7

$$\frac{1}{k_{WP}}(z_P - z_W) = \frac{1}{k_W}(z_{WP} - z_W) + \frac{1}{k_P}(z_W - z_{WP})$$

الأن، تعرف WP على انها نقطة الوسط للخط الواصل بين W و P وبالتالي

$$k_{WP} = \frac{2\,k_W k_P}{k_W + k_P} \qquad (7.6)$$

وسوف نستخدم (6.7) بدلا من (5.79 لقيمنا لـ k عند WP.

دعنا نفحص: اذا قيم k عند W و P هي نفسها، نحن نريد قيمة k عند WP بان تكون نفسها أيضا. المعادلة (6.7) تؤكد هذا.

اذا كانت k تؤول الى الصفر عند W او P، كذلك تفعل قيمة k عند WP كما هو معطى حسب المعادلة (6.7)، وهنا يكون التناقض قد اختفى: سيكون لدينا توصيل يساوي صفر عبر الجدار الاديباتيكي وهذا صحيح ومناسب.

اذا k عند W (على سبيل المثال) تؤول إلى ما لانهاية، وk عند WP تصبح ضعف قيمة k عند P. هذا، كما سنرى قريبا، يضمن ان درجات الحرارة عند W وWP هي نفسها (وهذا صحيح): بمعنى، لا يوجد هناك تغير في درجة الحرارة داخل الموصل الممتاز.

5.7 الشروط الحدية

في الشكل 4.7 تقع النقطة WP على الحد الفيزيائي، مع w خارج الجسم والنقطة P داخله، ولدينا الشروط الحدية المرتبطة بدرجة الحرارة عند W (في الخارج) الى درجة الحرارة عند P (في الداخل). وهذه قد تأخذ عدة اشكال. لان صيغتنا (6.7) تسمح لنا لاستخدامها في حالة انقطاع مفاجئ في المادة، سوف نكون قادرين على استخدامها لتحديد شروطنا الحدية من خلال الموصليات الحرارية. اذا علمنا درجات الحرارة عند W وعند P، سنكون قادرين على حساب درجة الحرارة عند WP (الحدود الفعلية) باستخدام الصيغة التالية

$$\frac{T_W - T_{WP}}{T_{WP} - T_W} = \frac{1/k_W}{1/k_P}$$

وهذا هو

$$T_{WP} = (k_W T_W + k_P T_P)/(k_W + k_P) \qquad (7.7)$$

وهذه يجب ان تكون مألوفة من نظرية الدوائر الكهربية الأولية، مع انخفاض درجة الحرارة الذي يستبدل انخفاض فرق الجهد.

الحدود الاديباتيكية

هذه هي الاسهل من ناحية التحديد. اذا كانت الحدود اديباتيكية، علينا ان نضع قيمة لـ k عند W بعدد صغير جدا: ثم k عند WP سوف يكون تقريبا صفر. الصيغة (7.7) تخبرنا ان

$$T_{wp} = T_p$$

والتي تخبرنا بان $\partial T/\partial z = 0$ عند الحد الاديباتيكي، وهذا ما يجب ان تكون عليه

حدود درجة الحرارة الثابتة

لتثبيت درجة الحرارة عند الحدود WP لقيمة معرفة، سوف نقوم بـ

(a) وضع T_w لقيمة الحدود
(b) وضع k_w لعدد كبير جدا.

ومن ثم، كما قد شاهدنا بالفعل، الصيغة (6.7) تعطينا

$$k_{wp} = s\ k_p$$

والصيغة (7.7) تعطي

$$T_{wp} = T_w$$

كما يجب ان تكون

تحذير ليس خطير: من خلال الطريقة التي استخدمناها لوضع قيم الحدود فعالة جدا، والحقيقة هي ان عدد صغير جدا (لنقل 1E-10) ليس في الحقيقة يساوي صفر، وهذا يعطي فترة طويلة وكافيه لتسرب بعض الحرارة من خلال الحدود الاديباتيكية بهذه الطريقة. انه من المهم ان تختار صفرك وعددك الكبير جدا ليناسب كمبيوترك وفي بعض الأحيان ليناسب مسألتك. الحقيقة إننا لا نستخدم صفر أو ما لانهاية لأنه لا يوجد هناك موصل بدرجة الكمال في الطبيعة ولا حتى حدود بدرجة حرارة ثابتة.

الانتقال الحراري المحدود عند الحدود

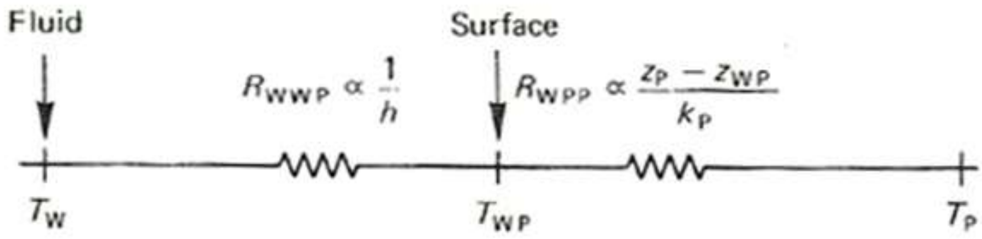
الفكرة من وراء التعامل مع الحالة المؤقتة (متغيرة في الزمن) لانتقال الحراري التي تقابل مسائل الحالة المستقرة في دراسة سلوك الجسم مع الزمن. سوف نعتبر ماذا يحدث اذا كمية محدودة من الحرارة سمح لها بالتسرب لكل وحدة زمن لكل وحدة مساحة عبر اسطح مختلفة من الجسم.

من المواصفات الشائعة لمثل هذه الشروط الحدية هو اشتراط ان

*k (تدرج الحرارة عبر الحدود)

*h= (فرق درجة الحرارة بين الحدود والخارج

حيث h هو معامل الانتقال الحراري السطحي. ويجب ان نضع حدود كما هو موضح في الشكل 5.7



الشكل 5.7

بمقارنة الشكل 5.7 مع الشكل 4.7 نرى انه يجب ان نستبدل الكمية

$(z_{wp} - z_w)/k_w$

بالكمية

$1/h$

وعليه يجب ان نستبدل kw بـ $h(z_{wp} - z_w)$.

هذا يعني انه يجب ان نحدد شروطنا الحدية من خلال الموصلية التخيلية

$$kw = h(z_p - z_w)/2 \qquad (7.8)$$

اذا اخذنا المعادلة (7.8) كشكل عام للشرط الحدي، فاننا نحتاج ببساطة لان نضع قيمة مناسبة لـ h (بدلا من k) لـ

(i) عدد كبير جدا لدرجات الحرارة الثابتة
(ii) عدد صغير جدا للحدود الاديباتيكية
(iii) عدد بحجم عادي لمعامل الانتقال الحراري السطحي المحدود.

انه من الطبيعي اكثر ان نحدد شروط بهذه الطريقة بدلا من ان نضع موصلية فعالة، كما في الطريقة المعتادة لتمييز الشروط الحدية المختلفة في مسائل من النوع الذي سوف نتعامل معه من خلال معامل الانتقال الحراري السطحي او من خلال عدد Biot. هذه هو العدد

hL/k

حيث L هو طول الجسم (مقاس في اتجاه انتقال الحرارة): يمكننا ان نرى من المعادلة (8.7) ان عدد Biot هو عدد ليس له وحدة.

عدد Biot كبير جدا يكافئ شرط حدود درجة الحرارة الثابتة وعدد صغير جدا يقابل الحد الاديباتيكي. الطريقة الصحيحة لتحديد شرط الحدود من خلال عدد Biot لان هذا بالتأكيد ضد نتائج قيمة كبيرة جدا L او صغيرة جدا لـ k، والذي يعني انه يجب ان نستخدم قيمة اصغر لـ h والا ستكون حالة انتقال حراري صفري بالفعل عبر الحدود. ولكن اذا تمسكنا بأعداد مثل 1E-10 أو اصغر، فانه لن نكون ضد مثل هذه الصعوبات حتى اذا استخدمنا معامل الانتقال الحراري السطحي لتحديد الشرط الحدي كما سنفعل.

شروط حدية من النوع المتدرج

نوع شائع اخر للشروط الحدية هو حيثما نعلم بكمية الحرارة المتسربة من خلال الحدود لكل وحدة مساحة لكل وحدة زمن: وهذا هو شرط فيض الحرارة المحددة. يمكننا استخدام قانون فوربيه لاشتقاق صيغة لقيمة درجة الحرارة خارج الجسم عند W، لقيمة Q معطاة للفيض الحراري. وكما نحن مهتمون فقط بتدرج T فإننا سوف نعتبر الامتداد الفعلي للجسم ليشمل النقطة W – أي ان k عند WP التي سوف تؤخذ نفس قيمة k عند P.

$$
\begin{aligned}
Q &= -k\, \partial T/\partial z \\
&= -k\,(T_P - T_W)/(z_P - z_W)
\end{aligned}
$$

$$Q\,(z_P - z_W)/k = T_W - T_P$$

$$T_W = T_P + Q\,(z_P - z_W)/k$$

$$T_{WP} = T_P + Q\,(z_P - z_W)/(2k)$$

بوضوح، وفي ضوء خبرتنا السابقة من الجزء 4 من هذا الكتاب فان وضع الشروط الحدية من النوع المتدرج، سوف يتوجب علينا ان نشمل معلومات عن الفيض الحراري المحدد في المعاملات بدلا من المخاطرة باستخدام التكرار.

8 The THC (Transient Heat Conduction) Computer Program

8.1 Introduction

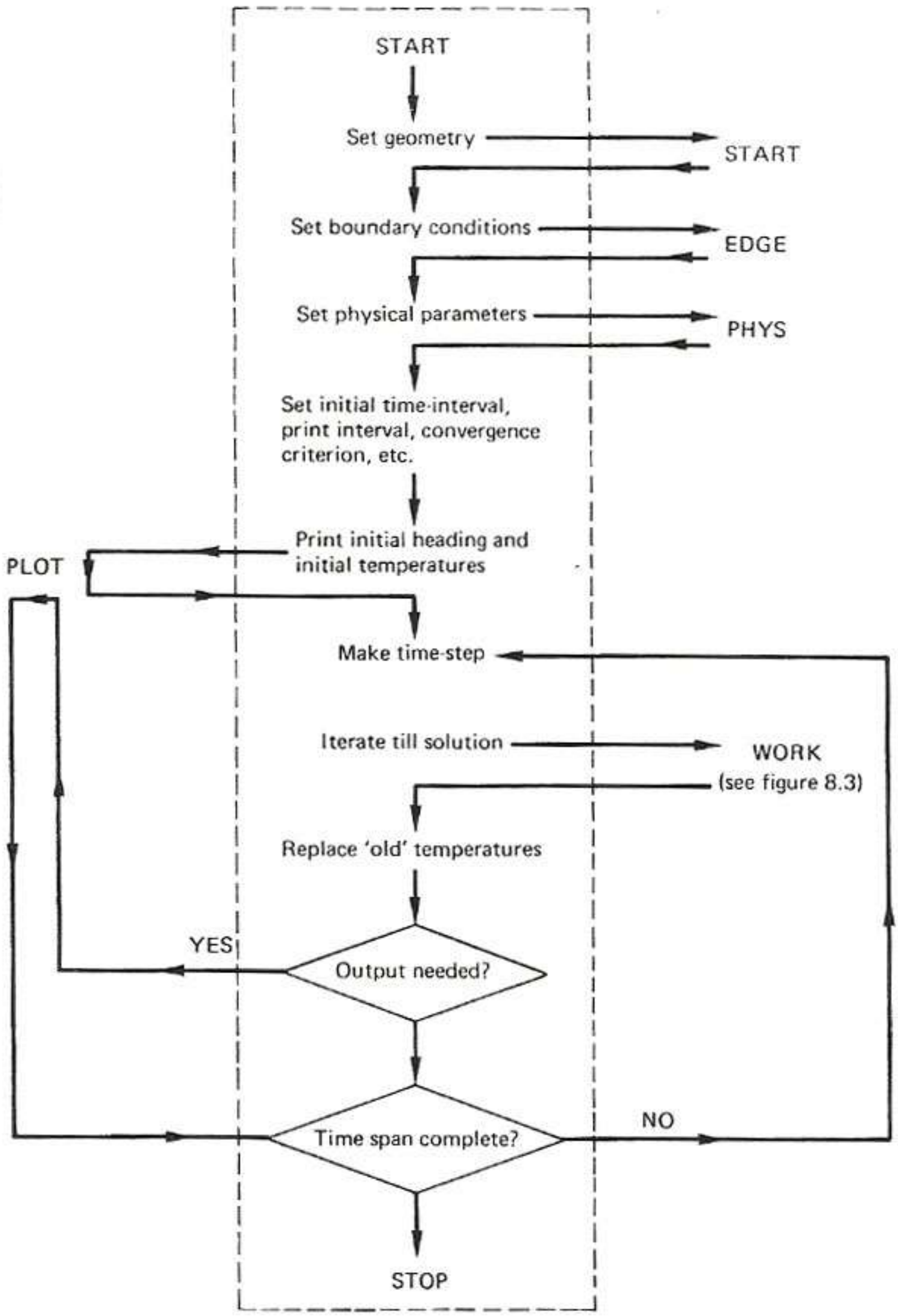
In chapters 1-7 we collected together all the components necessary for constructing a general-purpose computer program for solving two-dimensional problems in heat transfer, electromagnetic theory and fluid dynamics. In fact, the only new idea we need to grapple with is that our dependent variable has acquired an extra subscript. We shall take advantage of the greater flexibility introduced by the way we calculate the grid-spacing (chapter 5) and the conductivity (chapter 7). Otherwise the equations are essentially the same as the ones we met in chapter 2. Above all, the equations remain more or less tri-diagonal.

The structure of the THC program is exactly as before
(Suitable for IBM PC or for the Apple II as listed)

```
1 REM MAIN PROGRAM SECTION: LINES 1-999
999 STOP

1000 REM SUBROUTINE START FOR INITIALISATION
1999 RETURN

2000 REM SUBROUTINE PHYS FOR THE PHYSICAL PROPERTIES
2999 RETURN

3000 REM SUBROUTINE EDGE FOR SETTING BOUNDARY CONDITIONS
3999 RETURN

4000 REM SUBROUTINE WORK FOR CALCULATING THE SOLUTION
4999 RETURN

5000 REM SUBROUTINE PLOT FOR PRINTING AND PLOTTING RESULTS
5999 RETURN

9000 REM SUBROUTINE DRAW: GRAPHICS AT 9100 ETC.
9999 RETURN
```

8.2 The MAIN Control Segment (1-999)

The MAIN segment of the THC program is illustrated in the stylised flowchart of figure 8.1.


START
Set geometry
START
Set boundary conditions
EDGE
Set physical parameters
PHYS
Set initial time-interval, print interval, convergence criterion, etc.
Print initial heading and initial temperatures
PLOT
Make time-step
Iterate till solution
WORK
(see figure 8.3)
Replace 'old' temperatures
YES
Output needed?
Time span complete?
NO
STOP

الشكل 1.8

After calls to the subroutines at 1000 (START), 3000 (EDGE), 2000 (PHYS) T1 (starting time in seconds – normally set to zero), T2 (time-increment) and factor T8 for increasing the subsequent time-increments are set. The order of the routines at 2000 and 3000 is dictated not by the fact that we call them in a particular sequence at the outset but because we shall not normally expect to revisit the routines at 1000 and 2000 at later times, while that at 3000 (EDGE) will be required subsequently if we have time-dependent boundary conditions.
C2 is set at line 170. We shall see that

will be required subsequently if we have time-dependent boundary conditions.
The value of the convergence criterion C2 is set at line 170. We shall see that the value we have chosen is suitable when we come to try out particular problems. The variable N7 determines how frequently the convergence of the iterative procedure is monitored. For time-dependent problems this is best left set at 1. If T2 is chosen to be very large, so as to give steady-state solutions (a Fourier number of 20 is quite sufficient to ensure this), N7 is automatically reset to 30. Likewise the variable E1 is used as a time (in seconds) beyond which the time-steps should not be allowed to proceed. The setting of 10 000 may not be satisfactory for some purposes – in fact, of course, E1 should be calculated to give a Fourier number of (say) 100 rather than being set in seconds.
which occurs between lines

a Fourier number of (say) 100 rather than being set in seconds.
We have to provide explicitly for the time-step, which occurs between lines 260 and 410. The newly calculated temperatures have to be stored as 'old' temperatures, so that they can be used in calculating the next lot of new temperatures.

When the program has determined that the time-stepping procedure is over, a test is made for whether the current information has been printed out. If not, the PLOT routine is called (GOSUB 5000).

We shall work throughout in SI units – normally in metres, kilograms, seconds etc.

The cast of variables, in order of appearance in MAIN (though not all necessarily used there), is

Variable	Line	Purpose
A(12), B(12), C(12), D(12)	25	coefficients for TDMA
K(12,12)	30	thermal conductivity
N(12,12), O(12,12)	30	new (N) and old (O) temperatures
P(12,12)	30	used in PLOT
Q(12,12)	30	heat source
R(12)	35	r-coordinates (y-coordinates)
S(12,12)	35	effective conductivities at SP
W(12,12)	35	effective conductivities at WP
Z(12)	35	z-coordinates (y-coordinates)
T1	140	elapsed time in seconds
T2	151	initial time-step Dt